Klasse ET1b **MaE1 - 2-te Klausur** 20. Januar 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den Summanden mit b^{15} der Summenentwicklung von $s_a = (a - b^3)^{21}$

b) $s_b = \sum_{j=2}^{9} \begin{pmatrix} 10 \\ j \end{pmatrix} = ?$

Aufgabe 2

Für welche Werte von m hat die Funktion

$$y = f(x) = (m+1)x^2 - 4mx + m + 6$$

ein Minimum vom Wert 5 ?

Aufgabe 3

a) Schreiben Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Gegeben ist ein Viereck mit den Ecken $A(0/8/-6)$, $B(-9/5/0)$, $C(4/0/3)$ und $D(-13/13/-9)$.
Behauptung: die Punkte A, B, C und D bilden ein Parallelogramm.
Ist diese Behauptung richtig? (*mit* Begründung)

Aufgabe 4

a) Welche der beiden Teilsummen s_{99} und s_{100} der Reihe $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots$ ist die grössere?

b) $y = f(x) = |1 - |x+1||$, $x \in \mathbb{R}$
Schreiben Sie die Funktion $y = f(x)$ mit Hilfe von Fallunterscheidungen ohne Beträge. Stellen Sie anschliessend $y = f(x)$ im Intervall $[-5, 5]$ graphisch dar,
Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen.

Aufgabe 5

a) Für welche x ist die folgende Ungleichung erfüllt?

$$\frac{4}{|x-2|} < \frac{1}{x+1}$$

b) Stellen Sie graphisch dar: $|y - 3x| > \frac{1}{2}x^2$, Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$x_0 = 2 \qquad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Zeigen Sie dass für alle $n \geq 0$ gilt:

a) $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$, (durch Nachrechnen)

b) $x_n \geq \sqrt{2}$, (mit vollständiger Induktion)

MaE1 Lösungen 2-te Klausur

Lösung 1

a) $k=5:(-1)^5\begin{pmatrix}21\\5\end{pmatrix}a^{16}b^{15} = -21\cdot 19\cdot 3\cdot 17\,a^{16}b^{15} = -20349\,a^{16}b^{15}$

b) $s_b = \sum\limits_{j=0}^{10}\begin{pmatrix}10\\j\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix} = 2^{10}-12 = 1012$

Lösung 2

$x_S = \frac{2m}{m+1}$ und $y_S = \frac{4m^2}{m+1} - 4m\,\frac{2m}{m+1} + m + 6 = 5$, was zu $3m^2-2m-1=0$ führt. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $m_1 = 1$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Lösung 3

a) $\vec{d} = 9\,\vec{a} - 5\,\vec{b} - 7\,\vec{c}$

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\-8\\9\end{pmatrix} \parallel \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-9\end{pmatrix}$ und $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{161}$

Lösung 4

a) s ist eine geometrische Reihe mit $q=-\frac{1}{2}$ und $a_1 = 1$, $s_{100} < s_{99}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x+2, & -2 \leq x < -1 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$

graphische Darstellung der einzelnen Geradenstücke

Lösung 5

a) $x+1$ muss positiv sein, $x \in (-1, -\frac{2}{5})$

b) graphische Darstellung

Lösung 6

a) mit der Rekursion für x_{n+1} einsetzen.

b) Verankerung: $x_0 > \sqrt{2}$ ist richtig
Induktionsschritt: $n \longmapsto n+1$
Induktions-Annahme: Aussage für n ist richtig, d.h. $x_n > \sqrt{2}$
neue Beh: Aussage ist auch für $n+1$ richtig.
Beweis: mit Hilfe von a):

$$x_{n+1} = \frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n} + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}\,,$$

da der erste Term positiv ist.