Klasse ET1b **MaE1 - 3-te Klausur** 10. Februar 2005

Name:

Aufgabe 1

Einem Würfel mit Kantenlänge 1 wird ein zweiter Würfel aufgesetzt, bei dem die Ecken der Grundfläche die Seitenmitten der Deckfläche des ersten Würfels sind; mit dem zweiten Würfel wird ebenso verfahren, usw.

Gesucht sind:

a) die Gesamthöhe h des entstehenden Turms.

b) sein Gesamtvolumen V.

c) seine Oberfläche O (inkl. Bodenfläche).

Lösung 1

a) Gesamthöhe $h = 2 + \sqrt{2}$

b) Gesamtvolumen $V = \frac{2}{7}\,(4 + \sqrt{2})$

c) Gesamtoberfläche $O = 10$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = |x-3| + |4 - |x+2|| - 2$, $D(f) = ?$

a) Schreiben Sie $y = f(x)$ mit Hilfe von Fallunterscheidungen *ohne* Beträge.

b) graphische Darstellung, $W(f) = ?$

Lösung 2

a) $D(f) = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-7, & x \geq 3 \\ -1, & 2 < x < 3 \\ -2x+3, & -2 \leq x \leq 2 \\ 7, & x < -6 \leq x < -2 \\ -2x-5, & x < -6 \end{cases}$$

b) graphische Darstellung, $W(f) = [-1, \infty)$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \ldots\right)$. Die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist definiert durch $b_n = \ln(a_n)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (Antworten *mit* Begründung)

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine arithmetische Folge.

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine geometrische Folge.

c) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine arithmetische Folge.

d) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine geometrische Folge.

Lösung 3

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist keine arithmetische Folge, cf. b)

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{3}{2}$

c) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine arithmetische Folge mit $d = \ln(q)$

d) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist keine geometrische Folge, cf. c)

Aufgabe 4

a) Stellen Sie $|x-2| - |y-3| \leq 4$ graphisch dar.
Einheiten auf beiden Achsen gleich: $1 \equiv 2$ Häuschen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung

$$\frac{4}{x+2} \geq \frac{3}{x-3}$$

erfüllt?

Lösung 4

a)

$$x \geq -2 \quad \text{und} \quad y \geq 3: \quad x - y \leq -1 \tag{1}$$
$$x \geq -2 \quad \text{und} \quad y < 3: \quad x + y \leq 5 \tag{2}$$
$$x < -2 \quad \text{und} \quad y \geq 3: \quad -x - y \leq 3 \tag{3}$$
$$x < -2 \quad \text{und} \quad y < 3: \quad -x + y \leq 9 \tag{4}$$

b) $x \neq -2$ und $x \neq 3:\ x \in (-2, 3) \cup [18, \infty)$

Aufgabe 5

a) Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(3, -2, 5)$ und $B(7, 5, z_B)$ ist $3\sqrt{10}$.
Gesucht ist z_B, *alle* Lösungen.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Bestimmen Sie λ so, dass

$$3\,\vec{a} - \frac{1}{2}\,\vec{b} + \frac{3}{4}\,\vec{c} - \frac{1}{3}\,\vec{d} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{71}{3} \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Lösung 5

a) $z_B = 0$ oder $z_B = 10$

b) $\lambda = 1$

Aufgabe 6

a) Gegeben sind die beiden Funktionen $y = f_1(x) = 3 \cdot e^{\frac{\ln(3)}{5}\,x}$ und $y = f_2(x) = e^{\frac{\ln(9)}{5}\,x}$.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_1(x) > f_2(x)$?

b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung:

$$2^{\log(x)} \cdot x^{\log(x)} = \frac{200}{x}$$

Lösung 6

a) $x < 5$ oder $x \in (-\infty, 5)$

b) $u := \log(x)$, und somit $u_1 = 1$ und $u_2 = -\log(2) - 2$, also $x_1 = 10$ und $x_2 = \frac{1}{200} = 0.005$

Aufgabe 7

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = ?$$

b) Zeigen Sie mit *vollständiger Induktion*, dass $a_n = n^3 - n$ für $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist

Lösung 7

a) $\frac{12}{5}$

b) Verankerung: $a_1 = 0$ ist durch 6 teilbar.
Schritt $n \to n+1$: sei $a_n = 6 \cdot q$.
$a_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3n(n+1) = 6 \cdot q + 3n(n+1)$.
$n(n+1)$ ist für $n \in \mathbb{N}$ immer durch 2 teilbar, woraus die Behauptung folgt

Aufgabe 8

a)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^2} - \ldots - \frac{n}{n^2}\right) = ?$$

b) $a_n = \left(1 + \left(-\frac{5}{8}^n\right)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

   i) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

   ii) Bestimmen Sie $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

Lösung 8

a) $\frac{1}{2}$

b) i) $a = 1$ und somit $n > \frac{\varepsilon}{\ln(5/8)}$