Klasse ET1b **MaE1/DMa1 - Nachklausur** 21. Februar 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

a) Für welche rechte Seiten b hat das gegebene Gleichungssystem Lösungen? $m = ?$, $n = ?$ und $r = ?$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) b_2 und anschliessend für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Lösungen.

Aufgabe 2

Welcher Punkt P der Parabel $y = -\frac{1}{9}x^2$ hat von der Geraden g durch die Punkte $A(-6, 0)$ und $B(0, 2)$ minimalen Abstand? Wie gross ist d_{min} ?

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A, *ohne* Zeilenpermutationen.

b) Lösen Sie mit Hilfe von a) das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b^T = (1,\ 0,\ 1,\ b_4)$

c) Wie gross muss b_4 sein, damit es Lösungen gibt.

Aufgabe 4

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist folgende Ungleichung erfüllt?

$$\frac{3}{|x-1|} \geq \frac{2}{x-2}$$

b) Bestimmen Sie für die gegebenen Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Grenzwerte $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, falls sie existieren.

$$\text{i) } a_n = \frac{\log(1/n) - \log(3/n)}{n + 2 - \sqrt{n^2+1}} \qquad \text{ii) } b_k = (-1)^k \frac{k^3+2}{k^3-k}$$

Aufgabe 5

Eine gerade Pyramide $ABCDS$ hat eine rechteckige Grundfläche $ABCD$. Ihre Spitze ist S. M ist der Mittelpunkt der Kante BS. Machen Sie sich zuerst eine gute Skizze.
Seien $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$

a) Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

b) Stellen Sie $\vec{a}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ dar.

Aufgabe 6

a) Seien A und B zwei symmetrische $n \times n-$Matrizen. Was muss gelten, damit $C = A \cdot B$ symmetrisch ist?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A mit dem Gauss-Algorithmus. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das überhaupt möglich ?

Lösung 1

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	-2	3	1	b_1
0	-3	6	-6	0	$b_2 - 2b_1$
0	0	0	0	0	$-3b_1 - b_2 + b_3$

$m = 3$, $n = 5$ und $r = 2$

a) Es gibt Lösungen, falls $-3b_1 - b_2 + b_3 = 0$

b) $b_2 = 4$, $r = 2$, drei freie Parameter, $x_3 = \mu$, $x_4 = \nu$ und $x_5 = \lambda$, damit $x_1 = -1 + 2\mu - 3\nu - \lambda$ und $x_2 = -2 + 2\mu - 2\nu$

Lösung 2

$g: 2x - 6y + 12 = 0$, $d = \frac{|2x_p - 6y_p + 12|}{\sqrt{4+36}}$ mit $y_p = -\frac{1}{9}\, x_p^2$ erhalten wir $d = \frac{|\frac{2}{3}x_p^2 + 2x_p + 12|}{\sqrt{40}}$. d wird minimal für $x_p = -\frac{3}{2}$, $y_p = -\frac{1}{4}$ und $d_{min} = \frac{21}{4\sqrt{10}}$

Lösung 3

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $Lc = b$: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = b_4 + 2 = 0$, d.h. $b_4 = -2$

c) $b_4 = -2$: $x_1 = -4 + \mu$, $x_2 = -3 + \mu$ $x_3 = -2 + \mu$, $x_4 = \mu$, freier Parameter.

Lösung 4

a) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup [4, \infty)$

b) i) Zähler: $\log(1/3) = -\log 3$, Nenner: $2 + \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}$, für $n \to \infty$ geht der Nenner gegen 2, also $a = -\frac{\log 3}{2}$, ii) b existiert nicht! Vorzeichen ± 1

Lösung 5

a) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c})$, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\,\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\,\vec{c}$ und $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}\,\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\,\vec{c}$

b) $\vec{a} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

Lösung 6

a) $C = A \cdot B$, $C^T = (A \cdot B)^T = B^T A^T = B \cdot A$, $C^T = C$, falls $A \cdot B = B \cdot A$, d.h. falls A und B kommutieren.

b) für $a \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & -1/a^2 \\ a & -1 & 1/a \\ -a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$