Klassen IT1a und IT1b **NLab - Klausur** 28. Juni 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist ein System $Ax - c = r$ von Fehlergleichungen.
Dabei sind die Spalten von A und die Messwerte wie folgt gegeben ($\varepsilon > 0$, klein):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 4.5 \\ 4.5 \\ 4.5 + \varepsilon \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei nun speziell $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-5}$ und 10^{-6}

a) Bestimmen Sie die ausgeglichenen Werte mit Hilfe der Normalgleichungen, Kondition des Gleichungssystems.

b) Bestimmen Sie die ausgeglichenen Werte mit Hilfe *Ihrer* $QR-$ Zerlegung von A, (Givensrotationen oder Householdertransformationen).

   Die Gleichungssysteme in a) und b) sollen mit *Ihrem* Gauss-Algorithmus gelöst werden.

c) Vergleichen Sie die in a) und b) erhalten Lösungen: absolute und relative Fehler.

Aufgabe 2

Lösen Sie die Kepler'sche Gleichung $M = E - \varepsilon \sin(E)$ für die numerischen Werte $\varepsilon = 0.5$ und $M = 2$.

a) mit *Bisektion*: Startwert $E_0 = M$. Geben Sie die ersten 10 Iterationsschritte an. Wieviele Iterationen sind für 10 korrekte Dezimalen nach dem Komma nötig?

b) Lösen Sie die gegebene Gleichung mit dem *Verfahren von Newton* und dem Startwert $E_0 = M$. Geben Sie für den Startwert E_0 sowie für jeden gerechneten Wert E_k die Grösse

$$L = L(E_k) = \left| \frac{f(E_k) \cdot f''(E_k)}{(f'(E_k))^2} \right|$$

   an. Stellen Sie $L(E_k)$ halblogarithmisch graphisch dar (für die beiden Werte $E_0 = M$ und $E_0 = 6 \cdot M$, was stellen Sie fest?).

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Funktion von Runge $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf dem Intervall $I = [-5, 5]$ gegeben.

a) Benützen Sie Ihre eigene Polynom-Interpolation, um $r(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit $n = 4, 8, 12$ äquidistanten Punkten zu interpolieren

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $r(x)$ graphisch dar.

c) Stellen Sie in einem separaten Bild $|p_n(x) - r(x)|$ für die gewählten n halblogarithmisch dar.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine tridiagonale $n \times n-$Matrix A, wobei auf der Diagonalen -2 (Ausnahmen: $a_{11} = a_{nn} = -1$) und auf den Nebendiagonalen 1 steht.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von n und δ auf möglichst einfache Weise.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Gram-Schmidt die $QR-$Zerlegung von A_δ für $n = 20, 50, 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$.

c) Überprüfen Sie die Orthogonalität von Q, indem Sie die Norm von $Q \cdot Q^T - Q^T \cdot Q$ betrachten.

d) Überprüfen Sie wie gut $Q \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $Q \cdot R - A_\delta$ angeben.

e) Was geschieht für $\delta \to 0$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Ihrer numerischen Ableitung die Punkte mit horizontalen Tangenten der Funktion

a) $f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x)$

b) $f_b(x) = 2x + |-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3|$

c) Stellen Sie die Funktion mit den Punkten mit horizontaler Tangente graphisch dar

d) Überprüfen Sie die Qualität der numerischen Ableitung (halblogarithmische Graphik)

Aufgabe 6

Auslöschung:

Vermeiden Sie bei der Berechnung von

a) $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\cos(1'') - 1$, wobei $1'' =$ eine Bogensekunde

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - 1') - 1$, wobei $1' =$ eine Bogenminute

die Auslöschung

Aufgabe 7

a)

b)

c)