Klasse DP1a **NMMa2 - 1-te Klausur** 19. April 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

Für welche Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $det(A) \neq 0$.

b) Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

Für welche Winkel φ ist $AB = BA$? (*alle* Lösungen)

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-1}$$

für $x > 0$, x gross.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung bei der Berechnung von $H(x)$.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1/2 & -5 \end{pmatrix}$ und $b^T = (2, 4, 1)$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnenmaximum-Strategie* die $LR-$ Zerlegung von A, (d.h. $LR = PA$)

b) Lösen Sie $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung aus a).

Aufgabe 4

Gegeben sind $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

a) Was geschieht bei der Matrix-Multiplikation $A_{neu} = L_2 A$?

b) Geben Sie die Inverse L_2^{-1} von L_2 an.

c) Ändern Sie L_2 so ab, dass die Elemente $(3, 2)$ und $(4, 2)$ in A_{neu} zu Null werden.

d) Geben Sie L_1 so an, dass in $A_{neu} = L_1 A$ unterhalb der Diagonalen in der ersten Spalte alle Elemente Null werden.

bitte wenden!

Aufgabe 5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_\infty -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

  b1) $\widetilde{b}_1 = (0,\, 1+\varepsilon)^T$

  b2) $\widetilde{b}_2 = (\varepsilon,\, 1)^T$

  und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$ die relativen Fehler $\|\delta\widetilde{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\widetilde{x}_2\|_\infty$.
Vergleich mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung, was stellen Sie fest?

Aufgabe 6

a) Was können Sie anhand der Determinante der Koeffizientenmatrix A über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -ax_1 & + & x_2 & & & = & c_1 \\ x_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & c_2 \\ & & x_2 & - & 2ax_3 & = & c_3 \end{array} \right.$$

in Abhängigkeit des Parameters a aussagen? $det(A) =?$

b) Betrachten Sie dabei die Fälle i) $c_1 = 0,\, c_2 = 1,\, c_3 = 0$ und ii) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

c) Geben Sie für die Fälle in b) für $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, falls überhaupt möglich, die Lösungen an.

NMMa2 Lösungen 1-te Klausur

Lösung 1

a) $det(A) = a(b-a)(c-b)(d-c)$; $a \neq 0$, $b \neq a$, $c \neq b$ und $d \neq c$

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$

also $\cos(2\varphi) = 1$ und $\sin(2\varphi) = 0$ und somit $\varphi = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Lösung 2

a) $H'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ und somit $\kappa_H(x) = \left|\frac{xH'(x)}{H(x)}\right| = \frac{x}{\sqrt{2x-3}\sqrt{2x-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \kappa_H(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2-3/x}\sqrt{x}\sqrt{2-1/x}} = \frac{1}{2}$

b) Erweiterung mit $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-1}$, was uns $H(x) = \frac{-2}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-1}}$ liefert.

Lösung 3

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, $c^T = (4,\ 3,\ 1)$ und
zweiter Schritt: $Rx = c$, $x^T = \left(-\frac{1}{2},\ 5,\ -1\right)$

Lösung 4

a) $L_2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 7 & 17 & 37 & 1 \\ -1 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

Vielfache der zweiten Zeile werden zur dritten ($5-$ faches) und vierten ($-2-$ faches) Zeile addiert.

allgemein für L_k: Vielfache der $k-$ ten Zeile werden zur $k+1-$ten, $k+2-$ ten, $\ldots$, $n-$ ten Zeile addiert.

b) $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 5

a) $A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^4 & -1 \\ -10^4 & 1 \end{pmatrix}$, also
$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 3 \cdot (2 \cdot 10^4 + 1) = 6 \cdot 10^4 + 3$

b) b1) $\widetilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ und b2) $\widetilde{x}_2 = \begin{pmatrix} -1+2\varepsilon 10^4 \\ 1-\varepsilon 10^4 \end{pmatrix}$

c) b1) $\Delta\widetilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ also $\|\delta\widetilde{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\widetilde{x}_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon$
und b2) $\Delta\widetilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon 10^4 \\ -\varepsilon 10^4 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\widetilde{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\widetilde{x}_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2\varepsilon 10^4$
theoretische Schranke: $\|\delta\widetilde{x}\|_\infty = \kappa(A)\left\|\delta\widetilde{b}\right\|_\infty = (6 \cdot 10^4 + 3)\varepsilon$

für b1) ist die theoretische Abschätzung zu pessimistisch, sie wird nicht angenommen
für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen.

Lösung 6

a) $det(A) = -a(2a^2 - 3)$, $det(A) = 0$, falls $a_1 = 0$ oder $a_{2.3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) i) $det(A) \neq 0$: genau eine Lösung, $det(A) = 0$: keine oder $\infty-$ viele Lösungen, je nach dem, ob evtl. VB erfüllt sind oder nicht.

ii) $det(A) \neq 0$: nur die triviale Lösung, $det(A) = 0$: $\infty-$ viele Lösungen.

c) i) Endschema für $a = \sqrt{3/2}$:

x_1	x_2	x_3	1
1	$-\sqrt{3/2}$	1	1
.	1	$-2\sqrt{3/2}$	0
.	.	.	$\sqrt{3/2}$

$0 = \sqrt{3/2}$ der letzten Zeile ist ein Widerspruch, also keine Lösung.

ii) Endschema:

x_1	x_2	x_3	1
1	$-\sqrt{3/2}$	1	0
.	1	$-2\sqrt{3/2}$	0
.	.	.	.

$\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter:
$x_3 = \mu =$ freier Parameter, $x = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3/2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 7

Aufgabe 8

a)

b)

Lösung 8

a)

b)

Aufgabe 9

Lösung 9