Klasse DP1a **NMMa2 2-te Klausur** 28. Juni 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{5}\,(x_k^2 - 5) \qquad x_0 = 2.1$$

a) Was wird hier berechnet? Wohin strebt diese Iteration? Was bedeutet „$x_{k+1} = x_k$“ ?

b) Bestimmen Sie $q \simeq |F'(x_0)|$.

c) Wieviele Wiederholungen brauchen Sie für 10 korrekte Dezimalen nach dem Komma?

Aufgabe 2

Gesucht ist für $b > 0$ das bestimmte Integral

$$F(b) = \int_0^b f(t)\,dt \qquad \text{wobei} \qquad f(t) = 2 + \frac{t^2}{3}$$

a) Bestimmen Sie U_n sowie O_n für eine äquidistante Zerlegung von $[0, b]$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = ?$

c) Wie gross muss n sein, damit $O_n - U_n < \frac{b^2}{300}$ erfüllt ist?

Aufgabe 3

Es sei m eine reelle Zahl und $|\varepsilon| < 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = m - \varepsilon \sin(x)$$

im Intervall $[m - \pi,\, m + \pi]$ eine eindeutige Lösung hat. (Satz über das Iterationsverfahren $x = F(x)$)

bitte wenden!

Aufgabe 4

Die Funktion $f(x) = \frac{x+2}{2}\,\sqrt{2x} - 12$ hat eine einzige Nullstelle bei etwa $x \simeq 5.5$.
Bilden Sie die Iterationsform

$$x := F(x) = x + k\, f(x) \qquad \text{mit dem Startwert: } x_0 = 5$$

a) Bestimmen Sie k so, dass $F'(5.5) = 0$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von k aus a) x_1, x_2 und anschliessend den Konvergenzquotienten $q \simeq |F'(x_2)|$.

c) Bilden Sie mit dem Δ^2-Verfahren von Aitken x_0' und $q' \simeq |F'(x_0')|$.

Aufgabe 5

Was soll unter folgendem Ausdruck verstanden werden?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte, Resultate *exakt*.

b) Welcher Fixpunkt ist attraktiv, welcher abstossend?

c) Bestimmen Sie die entsprechenden *Konvergenzquotienten*.

Aufgabe 6

$$\xi_k = 0,\, h,\, 2h \qquad \xi \in [0,\, 2h]$$

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k so, dass die Polynome bis höchstens zum Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie die in a) gefundene *Quadraturformel* zur Integration von

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

NMMa2 Lösungen 2-te Klausur

Lösung 1

a) $s = \sqrt{5}$

b) $q \simeq |F'(x_0)| = |x - \frac{1}{5} \cdot 2.1| = 0.16,$

c) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$, $|e_0| = |x_0 - s| = 0.136...$ und somit $k \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{|e_0|}}{\log q} \simeq 11.854...$, also $k = 12$

Lösung 2

a) $O_n = 2b + \frac{b^3}{18} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ bzw. $U_n = 2b + \frac{b^3}{18} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

b) $F(b) = 2b + \frac{b^3}{9}$

c) $n > 100\, b$

Lösung 3

- $F(x) = m - \varepsilon \sin(x)$ ist stetig auf $I = [m - \pi,\, m + \pi]$
- $\sin(m \pm \pi) = -\sin(m)$, also $F(m \pm \pi) = m + \varepsilon \sin(m)$ d.h. $F(I) \subset I$
- $F'(x) = -\varepsilon \cos(x)$ und somit $|F'(x)| \leq |\varepsilon| < 1$

Lösung 4

a) $F'(x) = 1 + k \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2x} + \frac{x+2}{2}\frac{1}{\sqrt{2x}} \right)$ und damit $k = -0.35855403138977$

b) $x_1 = 5.33418246468211$, $x_2 = 5.34220576003721$, $q \simeq |F'(x_2)| = 0.01130224251047$, statt der $0.6871\ldots$ der Theorie!

c) $x_0' = 5.34240312768592$ und damit $q' = 0.01128803150682$, etwas besser als q aus b)

Lösung 5

Eine Fixpunktiteration $x = F(x)$ mit $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$

a) $x = F(x)$, was $x^2 - x - 1 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_{1.2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ liefert.

b) $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $F'(x_{1.2}) = -\frac{2}{3\pm\sqrt{5}}$ $|F'(x_1)| = \frac{2}{3+\sqrt{5}} < 1$ und $|F'(x_2)| = \frac{2}{3-\sqrt{5}} > 1$, d.h. x_1 ist attraktiv und x_2 ist abstossend.

c) $q = |F'(x_1)| = 0.381\ldots$

Lösung 6

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 2h \\ & & w_1 & + & 2w_2 & = & 2h \\ & & w_1 & + & 4w_2 & = & \frac{8}{3}\,h \end{array} \right.$$

Lösung: $w_2 = w_0 = \frac{h}{3}$ und $w_1 = \frac{4h}{3}$, also $Q = \frac{h}{3}\ (f(0) + 4f(h) + f(2h))$.
Transformation vom Standardintervall $[0,\, 2h]$ auf $[a,\, b]$ mit $x = m\xi + q$, wobei $m = \frac{b-a}{2h}$ und $q = a$

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = m \cdot \int\limits_0^{2h} f(m\xi + q)\,d\xi \simeq \frac{b-a}{6}\ \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Regel von Simpson!

Lösung 7

a)

b)

c)

d)

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 8

Aufgabe 8

a)

b)

Lösung 9

a)

b)

Aufgabe 9

Lösung 10