Numerik - Nachklausur 12. Juli 2005

alle Aufgaben zählen gleich

Aufgabe 1

$$e^x - x^2 = 0$$

a) Lösen Sie die gegebene Gleichung mit *Newton*, Startwert $x_0 = 0$, *alle* Zwischenresultate, auf Rechnergenauigkeit.

b) i) Ist die Konvergenzbedingung für $x_0 = 0$ erfüllt? (Angabe von $L(x_0)$)
   ii) Wie gross ist der Konvergenzquotient?

Aufgabe 2

Bis zum wievielten *Trapezwert* T_k muss mindestens gerechnet werden, um ein Resultat zu erhalten, das vom exakten Wert

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

um weniger als 10^{-3} abweicht? (mit einer Abschätzung für den Fehler nach oben)

Es wird *fortgesetzte Halbierung* verwendet. Wieviele Funktionsauswertungen sind dazu nötig?

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie graphisch, dass

$$g(x) = \sqrt{x} + 1$$

einen Fixpunkt hat. (Einheiten: $1 \equiv 2cm$ auf beiden Achsen)
Bestimmen Sie diesen Fixpunkt algebraisch, Resultat *exakt*.

b) Prüfen Sie nach, ob die Voraussetzungen des Satzes über die Iteration im Intervall $[a, b] = [2, 3]$ erfüllt sind.

Aufgabe 4

$$\xi_k = -1, 0, 1 \qquad \xi \in [-1, 1]$$

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k so, dass Polynome bis höchstens zum Grad 3 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie die in a) gefundene *Quadraturformel* zur Integration von

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Aufgabe 5

Sie haben einen Rechner zur Verfügung, der addieren, subtrahieren und multiplizieren kann, *nicht* aber dividieren!

Mit Hilfe der *Methode von Newton* soll nun eine Division realisiert werden, bei der *nur* Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen verwendet werden.

Testen Sie Ihren Newton zur Berechnung von $\frac{1}{7}$: Startwert $x_0 = 0.1$ (Dezimalzahlen können dargestellt werden)

Aufgabe 6

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx$$

Wie klein muss das erste, bzw. wie gross darf das letzte Teilintervall sein, damit der Integrationsfehler auf diesen Teilintervallen bei der Trapezmethode kleiner als $\varepsilon > 0$ ist?

NMMa2 Lösungen Numerik Nachklausur

Lösung 1

a)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} - x_k^2}{e^{x_k} - 2x_k} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= -0.7330436 \\ x_3 &= -0.73380778632 \\ x_4 &= -0.73346746833 \\ x_5 &= -0.73346742250 = x_6 \end{aligned}$$

b)

$$F'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{(e^x - x^2) \cdot (e^x - 2)}{(e^x - 2x)^2}$$

i) $L(x_0) = |F'(0)| = 1$!! nein
ii) $q = |F'(s)| = 0$

Lösung 2

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, somit $M = \max\limits_{1 \leq x \leq 1} |f''(x)| = 2$

maximaler absoluter Fehler $= \frac{1}{12} h^2 \cdot M \leq 10^{-3}$ mit $h = \frac{1}{2^k}$ erhalten wir $\frac{1}{4^k} \leq 6 \cdot 10^{-3}$,
also $k \geq \frac{3 + \log(1/6)}{\log(4)} \simeq 3.69$, d.h. $k = 4$ bis und mit T_4
Anzahl Funktionsauswertungen bis und mit T_k: $2^k + 1$, hier $= 17$, da $k = 4$

Lösung 3

a) Graphik
$x = \sqrt{x} + 1$, also $x^2 - 3x + 1 = 0$, $s_{1.2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, hier kommt nur $s = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ in Frage.

b)
- $F(x)$ ist stetig, da $\sqrt{x}$ stetig und $\sqrt{x} + 1$ ebenso.
- $2 < F(2) = \sqrt{2} + 1 < 3$ und $2 < F(3) = \sqrt{3} + 1 < 3$, also $F(I) \subset I$
- $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $L := M = \max\limits_{x \in I} |F'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$

Lösung 4

a) zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} w_{-1} + w_0 + w_1 = 2 \\ w_{-1} \qquad\quad + w_1 = 0 \\ w_{-1} \qquad\quad + w_1 = \frac{2}{3} \\ w_{-1} \qquad\quad + w_1 = 0 \end{cases}$$

Lösung: $w_{-1} = w_1 = \frac{1}{3}$ und $w_0 = \frac{4}{3}$, also

$$\int_{-1}^{1} p_3(\xi)\, d\xi = \frac{1}{3} \left[p_3(-1) + 4 \cdot p_3(0) + p_3(1) \right]$$

Simpson für das Intervall $[-1, 1]$

b) $[-1, 1] \longrightarrow [a, b]$ mit $x(\xi) = m\xi + q$: $m = \frac{b-a}{2}$, $q = \frac{a+b}{2}$ und $dx = m d\xi$ erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\, dx = m \int_{-1}^{1} f(m\xi + q)\, d\xi \simeq m\, \frac{1}{3} \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2} \right) + f(b) \right]$$

Simpson für das Intervall $[a, b]$

Lösung 5

$f(x) = \frac{a}{x} - 1$, $a \neq 0$: $f(x) = 0$ hat die Lösung $x = \frac{1}{a}$
$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + x_k(1 - ax_k)$

speziell: $a = 7$ und $x_0 = 0.1$, $s = \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ = periodischer Dezmalbruch mit Periodenlänge 6

$$\begin{array}{lcll} x_0 & = & 0.1 & \\ x_1 & = & 0.1417000 & \\ x_2 & = & 0.14284777000 & \\ x_3 & = & 0.14285714224219 & \\ x_4 & = & 0.14285714285714 = & x_5 \end{array}$$

Lösung 6

$f(x) = \frac{1}{x^4}$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$ und $f''(x) = \frac{20}{x^6}$

erstes Teilintervall: $[1,\, 1 + h_1]$ mit $M = \max |f''(x)| = 20$

Fehlerabschätzung: $\frac{h_1}{12} h_1^2 \cdot 20 \leq \varepsilon$, also $h_1 \leq \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot \varepsilon}$

letztes $= n-$tes Teilintervall: $[2 - h_n,\, 2]$ mit $M = \max |f''(x)| = \frac{20}{(2-h_n)^6}$

Fehlerabschätzung: $\frac{h_n}{12} h_n^2 \cdot \frac{20}{(2-h_n)^6} \leq \varepsilon$, also $\frac{h_n^3}{(2-h_n)^6} \leq \frac{3}{5} \cdot \varepsilon$ und somit $u \leq \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot \varepsilon} =: h_1$ mit $u := \frac{h_n}{(2-h_n)^2}$

Damit erhalten wir eine quadratische Ungleichung für h_n:

$$0 \leq h_n^2 - \frac{1 + 4h_1}{h_1}\, h_n + 4$$

mit den Lösungen (für Gleichheit):

$$h_n = \frac{1 + 4h_1}{2h_1} \pm \frac{1}{2h_1} \sqrt{1 + 8h_1}$$

h_n mus kleiner als dei Intervall-Länge sein! Es kommt also nur die Lösung mit dem negativen Vorzeichen in Frage:

$$h_n \leq \frac{1 + 4h_1}{2h_1} - \frac{1}{2h_1} \sqrt{1 + 8h_1}$$

z.B.: $\varepsilon = 10^{-3}$: $h_1 = 0.084...$ und $h_n = 0.256...$! also bereits grösser als das dreifache von h_1!