Klasse DP1a **Labor - Klausur** 07. Juli 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$\cos(2x) = x^2 \tag{1}$$

mit der Nullstelle $s = 0.600769149670288$ im Intervall $[a,\, b] = [0,\, 1.5]$.

a) Lösen Sie (1) numerisch mit der Bisektion, Regula Falsi und der Methode von Newton.

b) Betrachten Sie für alle drei Verfahren das Konvergenzverhalten; Startwert $x_0 = 0.75$ für die Methode von Newton und das gegebene Intervall $[a,\, b]$ für die beiden anderen Methoden.

c) Stellen Sie die absoluten Fehler halblogarithmisch in Abhängigkeit der Anzahl Wiederholungen graphisch dar, alle drei Methoden in derselben Grafik. ($Nmax = 40$).

Aufgabe 2

Romberg-Intergration:

a) Betrachten Sie die beiden Integrale

$$\text{a1) } I_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \qquad \text{a2) } I_2 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) \quad \text{partielle Integration}$$

b) Fortgesetzte Halbierung: führen Sie höchstens $kmax = 6$ Halbierungen durch.

c) Betrachten Sie die Quotienten

$$q_k = \frac{T_{k,k} - I}{T_{k-1,k-1} - I} \tag{2}$$

wobei $I =$ exakter Wert von I_1 bzw. I_2.

Stellen Sie (2) halblogarithmisch graphisch dar und überprüfen Sie, ob Sie Superlinearität haben. Was stellen Sie fest?

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Funktion von Runge $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf dem Intervall $I = [-5, 5]$ gegeben.

a) Benützen Sie Ihre eigene Polynom-Interpolation, um $r(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit $n = 4, 8, 12$ äquidistanten Punkten zu interpolieren

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $r(x)$ graphisch dar.

c) Stellen Sie in einem separaten Bild $|p_n(x) - r(x)|$ für die gewählten n halblogarithmisch dar.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine tridiagonale $n \times n-$Matrix A, wobei auf der Diagonalen -2 (Ausnahmen: $a_{11} = a_{nn} = -1$) und auf den Nebendiagonalen 1 steht.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von n und δ auf möglichst einfache Weise.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Gram-Schmidt die $QR-$Zerlegung von A_δ für $n = 20, 50, 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$.

c) Überprüfen Sie die Orthogonalität von Q, indem Sie die Norm von $Q \cdot Q^T - Q^T \cdot Q$ betrachten.

d) Überprüfen Sie wie gut $Q \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $Q \cdot R - A_\delta$ angeben.

e) Was geschieht für $\delta \to 0$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Ihrer numerischen Ableitung die Punkte mit horizontalen Tangenten der Funktion

a) $f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x)$

b) $f_b(x) = 2x + |-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3|$

c) Stellen Sie die Funktion mit den Punkten mit horizontaler Tangente graphisch dar

d) Überprüfen Sie die Qualität der numerischen Ableitung (halblogarithmische Graphik)

Aufgabe 6

Auslöschung:

Vermeiden Sie bei der Berechnung von

a) $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\cos(1'') - 1$, wobei $1''$ = eine Bogensekunde

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - 1') - 1$, wobei $1'$ = eine Bogenminute

die Auslöschung

Aufgabe 7

a)

b)

c)