Klasse DP1a **Labor - Klausur** 08. Juli 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{-x} - \eta \tag{1}$$

wobei $\eta = 10^{-9}$ mit der Nullstelle $s = -\ln(\eta) = 20.723265836946411$.

(1) wird mit der Methode von Newton numerisch gelöst.

Student XY behauptet, es sei gut genug als Abbruchkriterium das Residuum zu verwenden, d.h. Abbruch, falls $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Studentin XX widerspricht. Sie möchte den Unterschied zweier aufeinanderfolgender $x-$ Werte klein genug machen, d.h. Abbruch, falls $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

a) Testen Sie die beiden Varianten mit $\varepsilon = 10^{-3}$, $x_0 = 0$, $Nmax = 30$.

b) Testen Sie die beiden Varianten mit $\varepsilon = 10^{-10}$, $x_0 = 0$, $Nmax = 30$.

c) Stellen Sie für a) und b) die absoluten und relativen Fehler der gerechneten Nullstelle halblogarithmisch graphisch dar.

d) Welches der beiden Kriterien ist besser?

Aufgabe 2

Gegeben ist das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} x \cdot e^{-x} \cos(2x)\, dx = \frac{3\left(e^{-2\pi} - 1\right) - 10\pi\, e^{-2\pi}}{25} \simeq -0.122122$$

a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten bei der numerischen Berechnung für fortgesetzte Halbierung, wobei $kmax = 10$

b) Betrachten Sie dabei die Mittelpunktregel, Trapezwertmethode und die Methode von Simpson.

c) Stellen Sie die Quotienten der absoluten Fehler

$$q_m = \frac{|e_m|}{|e_{m+1}|} \qquad m = 0, 1, \ldots, kmax - 1 \tag{2}$$

für die drei Methoden halblogarithmisch graphisch dar. Wohin streben diese Quotienten?

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist auf dem Intervall $I = [-5, 5]$ gegeben.

a) Benützen Sie Ihre eigene Polynom-Interpolation, um $f(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit $n = 4, 8, 12$ äquidistanten Punkten zu interpolieren

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $f(x)$ graphisch dar.

c) Stellen Sie in einem separaten Bild $|p_n(x) - f(x)|$ für die gewählten n halblogarithmisch dar.

Aufgabe 4

Gegeben sind $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Mit diesen beiden Vektoren wird $A = x \cdot y^T$ gebildet.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von x, y und δ auf möglichst einfache Weise.
Nehmen Sie für x lauter Einsen und für y einen „Zufallsvektor".

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Gram-Schmidt die $QR-$Zerlegung von A_δ für $n = 20, 50, 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$.

c) Überprüfen Sie die Orthogonalität von Q, indem Sie die Norm von $Q \cdot Q^T - Q^T \cdot Q$ betrachten.

d) Überprüfen Sie wie gut $Q \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $Q \cdot R - A_\delta$ angeben.

e) Was geschieht für $\delta \to 0$

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2