

## Aufgabe 1

lineare Abbildung:

Gegeben sei  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto y = Ax \in \mathbb{R}^m$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis  $\Sigma_e$ .

- $n = ?$ ,  $m = ?$  und  $\text{Rang}(A) = ?$
- $\dim(\text{Kern}(A)) = ?$ , bestimmen Sie eine Basis für den Kern von  $A$ .
- $\dim(\text{Bild}(A)) = ?$ , bestimmen Sie eine Basis für das Bild von  $A$ .

## Aufgabe 2

- Wir betrachten den Vektorraum der Polynome vom Grad 3. Sind die gegebenen Polynome linear unabhängig bzw. linear abhängig?

a1)  $\{1, 2x^2, x^2 + 2\}$

a2)  $\{4, 3x - 1, 2x^2 + 1, x^3 - 1\}$

- Gegeben ist der Vektorraum der Polynome vom Grad 2:  $P_2 = \text{span}\{1, x, x^2\}$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  mit  $(p, q)_k : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei

$$(p, q)_1 := \int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx$$

$$(p, q)_2 := p(0) \cdot q(0) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx$$

$$(p, q)_3 := p(0) \cdot q(0) + p'(0) \cdot q'(0) + p''(x) \cdot q''(x)$$

- welches der definierten Produkte  $(p, q)_k$  ist ein Skalarprodukt?

- Geben Sie die Matrix der Werte  $(x^i, x^j)_k$ ,  $i, j = 0, 1, 2$  und  $k = 1, 2, 3$  an, d.h.  $(x, y)_k = x^T A_k y$

## Aufgabe 3

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_b : b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Sigma_c : c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_e : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Geben Sie die Transformation  $T_{eb}$  von  $\Sigma_e$  nach  $\Sigma_b$ , d.h.  $\Sigma_e \rightarrow \Sigma_b$  an.
- Geben Sie die Transformation  $T_{ec}$  von  $\Sigma_e$  nach  $\Sigma_c$ , d.h.  $\Sigma_e \rightarrow \Sigma_c$  an.
- Geben Sie die Transformation  $T_{bc}$  von  $\Sigma_b$  nach  $\Sigma_c$ , d.h.  $\Sigma_b \rightarrow \Sigma_c$  an. (Tipp: Umweg über  $\Sigma_e$ )
- Gegeben sind die Vektoren  $\vec{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$  bzgl.  $\Sigma_e$  und  $\vec{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b$  bzgl.  $\Sigma_b$ .

Gesucht sind diese Vektoren bzgl. der anderen Basen.

#### Aufgabe 4

Betrachten Sie die implizite Mittelpunkregel

$$k_1 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right) \quad (1)$$

$$y_{k+1} = y_k + h k_1 \quad (2)$$

- Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet dieser Methode.
- Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(0) = \alpha$$

$$\dot{x}(0) = \beta$$

Bestimmen Sie für dieses Problem mit Hilfe von a) die Schrittweiten  $h$  so, dass die Methode stabil wird. Feststellung?

#### Aufgabe 5

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  für  $y \in \mathbb{R}^3$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 32.6 & 35.7 \\ 0 & -48 & 9 \\ 0 & 9 & -72 \end{pmatrix} \quad \text{und den Anfangsbedingungen: } y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie dieses System mit Hilfe des EWP von  $A$ , (EW und EV *exakt*).
- Zur numerischen Lösung dieses Systems soll das klassische RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

verwendet werden. Es soll 4–stellige Genauigkeit erreicht werden. Wie müssen die Schrittweiten gewählt werden?

#### Aufgabe 6

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \dot{y} + 3y - 5y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = -1 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \frac{1}{2}$$

- Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung 3–ter Ordnung als lineares System  $\dot{z} = Az$  von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- Approximieren Sie  $z(h)$  mit der Trapezmethode für  $h = 0.5$ .

### Aufgabe 7

alte Klausur-Aufgabe, ist neu zu schreiben!

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

- Lösen Sie das gegebene Differentialgleichungssystem durch Entkopplung. (Hornerschema für die EW)
- Für welche Anfangsbedingungen streben alle Lösungen gegen Null?

### Aufgabe 8

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 0.12\dot{x} + 2x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$

- Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- exakte Lösung des gegebenen AWP, durch Entkopplung.

## Lösung 1

a)  $n = 7, m = 4, \text{Rang}(A) = r = 3$  mit Gauss-Algorithmus

Endschema:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	<b>1</b>
①	2	3	0	0	1	2	0
.	①	3	1	1	2	1	0
.	.	.	.	.	①	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.

b)  $\dim(\text{Kern}(A)) = 4 = n - r =$  Anzahl freie Parameter, nämlich:  $x_7 = \mu_1, x_5 = \mu_2, x_4 = \mu_3$  und  $x_3 = \mu_4$ , also  $x = \mu_4 b_4 + \mu_3 b_3 + \mu_2 b_2 + \mu_1 b_1$ , wobei

$$b_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern}(A) = \text{span}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

c)  $\dim(\text{Bild}(A)) = r = 3$  Pivot-Spalten spannen das Bild von  $A$  auf:  $\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(6)}\}$ , wobei

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## Lösung 2

a) a1) Die drei gegebenen Polynome sind linear abhängig.

a2) Die gegebenen Polynome sind linear unabhängig.

b)  $(p, q)_1$  ist kein Skalarprodukt, da für  $p \equiv 1$  ist  $p'(x) = 0$  und somit  $(p, p)_1 = 0$  obwohl  $p \neq 0$

$(p, q)_2$  und  $(p, q)_3$  sind Skalarprodukte: positiv definit und symmetrisch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bei  $A_1$  ist positiv definit verletzt

## Lösung 3

a)

$$T_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$T_{ec} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)  $T_{bc} : \Sigma_b \xrightarrow{T_{eb}^{-1}} \Sigma_e \xrightarrow{T_{ec}} \Sigma_c$ , also

$$T_{bc} = T_{eb}^{-1} T_{ec} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{ec}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{0P} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_b = T_{eb}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e & \vec{0P} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e \quad \text{und} \\ \vec{0Q} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e = T_{eb} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b & \vec{0Q} &= \begin{pmatrix} -5/3 \\ -12/3 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e \end{aligned}$$

#### Lösung 4

a)  $y' = \lambda y$  und somit  $k_1 = \lambda (y_k + \frac{h}{2} k_1) = \lambda y_k + \frac{h\lambda}{2} k_1$ , also

$$k_1 = \frac{1}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \lambda y_k \quad y_{k+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \cdot y_k$$

mit  $z := h\lambda$  erhält man schliesslich

$$R(z) = \frac{2+z}{2-z}$$

Stabilitätsgebiet:  $|R(z)| < 1$ , was für  $\Re(z) < 0$  erfüllt ist, d.h. die Methode ist absolut stabil.

b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$ , somit  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$  rein imaginär.  $h\lambda \in \Im(z)$ , bzw.  $\Re(h\lambda) = 0$ ! Methode funktioniert trotzdem, obwohl  $|R(z)| = 1$ !

#### Lösung 5

a) EWP von  $A$ :  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = -45$  und  $\lambda_3 = -75$

zugehörige EV:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und somit: allgemeine Lösung:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 x} \cdot v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 x} \cdot v^{(3)}$$

Bestimmung der  $c_k$  mit den AB:  $c_1 = 15$ ,  $c_2 = 4$  und  $c_3 = -1$  und schliesslich:

$$y(x) = 15 \cdot e^{(-1/2)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot e^{(-45x)} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{(-75x)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Anfangsschrittweite  $h_1 : F(h\lambda) := 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}$  muss mit  $e^{(-75h_1)}$  5-stellig übereinstimmen!

$$\left| \frac{h_1^5 (-75)^5}{5!} \right| < 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{Restglied der Taylorreihe}$$

Diese Schrittweite  $h_1$  muss solange verwendet werden, bis  $e^{(-75h_1)n_1}$  klein genug, d.h.  $e^{(-75h_1)n_1} < 5 \cdot 10^{-6}$ , also  $h_1 = 0.0030239\dots$  und  $n_1 = 54$  und somit  $x_1 = n_1 h_1 = 0.172929\dots$

Ab  $x_1$  darf eine Schrittweite  $h_2 > h_1$  verwendet werden: obige Überlegung muss nun mit  $e^{(-45h_2)}$  gelten. Hier wird  $h_2 = 0.005039\dots$  und  $n_2 = 54$  und damit  $x_2 = n_2 h_2 = 0.2721\dots$

Ab  $x_1 + x_2$  darf eine Schrittweite  $h_3 > h_2$  verwendet werden: obige Überlegung muss nun mit  $e^{(-0.5h_3)}$  gelten. Dies ergäbe  $h_3 = 0.4535\dots$  was aber im Widerspruch zur Stabilität wäre,  $\mu = h_3(-75) \notin \mathbb{S}$  (da immer das ganze System integriert wird, keine Entkopplung).

Die maximal mögliche Schrittweite muss

$$-2.78 < h(-75) < 0$$

erfüllen, also  $0 < h < 0.037$

## Lösung 6

a) Sei  $z_1 := y$ ,  $z_2 := \dot{y}$  und  $z_3 := \ddot{y}$ : damit erhalten wir

$$\dot{z} = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Trapezmethode:  $z(h) - z(0) = \frac{h}{2} (A \cdot z(0) + A \cdot z(h))$ , wir haben ein *lineares* System!

$$z(h) = \left( I_3 - \frac{h}{2} A \right)^{-1} \left( I_3 + \frac{h}{2} A \right) \cdot z(0)$$

wobei

$$\left( I_3 - \frac{h}{2} A \right)^{-1} = \frac{1}{\det(I_3 - \frac{h}{2} A)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{4} & \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} & \frac{h^2}{4} \\ \frac{5h^2}{4} & 1 + \frac{h}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{5h}{2} & -\frac{3h}{2} + \frac{5h^2}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\det(I_3 - \frac{h}{2} A) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{4} - \frac{5h^3}{8}$ .

$h = \frac{1}{2}$ :  $(I_3 - \frac{h}{2} A)^{-1} = \frac{1}{87} \begin{pmatrix} 92 & 20 & 4 \\ 20 & 80 & 16 \\ 80 & -28 & 64 \end{pmatrix}$  und  $(I_3 + \frac{h}{2} A) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  und somit

$$z(0.5) = \frac{1}{87} \begin{pmatrix} 92 & 20 & 4 \\ 20 & 80 & 16 \\ 80 & -28 & 64 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -31 \\ -8 \\ -93 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.0690 \\ -0.2759 \\ -1.6034 \end{pmatrix}$$