

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

**Aufgabe 1**

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & q & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a^5 \\ a^2 & 0 & a^2 & a^5 & a^6 \\ a^3 & 1 & a^3 & a^6 & a^7 \\ a^4 + 1 & a^6 & a^4 & a^7 & a^8 \end{vmatrix}$$

**Aufgabe 2**

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1/2 & -5 \end{pmatrix}$  und

$$b^T = (2, 4, 1).$$

- Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnenmaximum-Strategie* die *LR*-Zerlegung von  $A$ , (d.h.  $LR = PA$ )
- Lösen Sie  $Ax = b$  mit Hilfe der Zerlegung aus a).

**Aufgabe 3**

$$\text{a) Bestimmen Sie die Determinante von } A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Für welche Werte  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ist  $\det(A) \neq 0$ .

$$\text{b) Gegeben sind } A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Für welche Winkel  $\varphi$  ist  $AB = BA$ ? (alle Lösungen)**Aufgabe 4**

- Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-5}$$

für  $x > 0$ ,  $x$  gross.

- Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung bei der Berechnung von  $H(x)$ .

**bitte wenden!**

### Aufgabe 5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  und der rechten Seite  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die exakte Lösung ist  $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie die Kondition  $\kappa(A)$  von  $A$  in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.
- b) Betrachten Sie nun für kleine positive  $\varepsilon$  die folgenden rechten Seiten:
  - b1)  $\hat{b}_1 = (0, 1 + \varepsilon)^T$
  - b2)  $\hat{b}_2 = (\varepsilon, 1)^T$und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$ .
- c) Bestimmen Sie für  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$  die relativen Fehler  $\|\delta x_1\|_\infty$  und  $\|\delta x_2\|_\infty$ .  
Vergleich mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung, was stellen Sie fest?

### Aufgabe 6

- a) Was können Sie anhand der Determinante der Koeffizientenmatrix  $A$  über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} -ax_1 + x_2 & = c_1 \\ x_1 - ax_2 + x_3 & = c_2 \\ x_2 - 2ax_3 & = c_3 \end{cases}$$

in Abhängigkeit des Parameters  $a$  aussagen?  $\det(A) = ?$

- b) Betrachten Sie dabei die Fälle i)  $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$  und ii)  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .
- c) Geben Sie für die Fälle in b) für  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , falls überhaupt möglich, die Lösungen an.

DMA2      Lösungen 1-te Klausur

**Lösung 1**

$$\text{a) } |A| = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & q & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-q) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2q \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6q$$

$$\text{b) } |B| = a^{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a^3 & a & a^2 \\ a^4 + 1 & a^6 & a^4 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a^{10} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a^3 & a & a^2 \\ 1 & a^6 & a^4 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} =$$

$$a^{10} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & a^2 & 1 & a \\ 1 & a^3 & a & a^2 \end{vmatrix} = (-a^{10}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^{10}$$

**Lösung 2**

$$\text{a) } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \textcircled{4} & 2 & 4 \\ 0 & \textcircled{2} & 7 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt:  $Lc = Pb$ ,  $c^T = (4, 3, 1)$  und  
zweiter Schritt:  $Rx = c$ ,  $x^T = (-\frac{1}{2}, 5, -1)$

**Lösung 3**

a)  $\det(A) = a(b-a)(c-b)(d-c)$ ;  $a \neq 0$ ,  $b \neq a$ ,  $c \neq b$  und  $d \neq c$

$$\text{b) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und } BA = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

also  $\cos(2\varphi) = 1$  und  $\sin(2\varphi) = 0$  und somit  $\varphi = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

**Lösung 4**

$$\text{a) } H'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} - \frac{1}{\sqrt{2x-5}} \quad \text{und somit } \kappa_H(x) = \left| \frac{xH'(x)}{H(x)} \right| = \frac{x}{\sqrt{2x-3}\sqrt{2x-5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \kappa_H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2-3/x}\sqrt{x}\sqrt{2-5/x}} = \frac{1}{2}$$

b) Erweiterung mit  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-5}$ , was uns  $H(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-5}}$  liefert.

### Lösung 5

a)  $A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^4 & -1 \\ -10^4 & 1 \end{pmatrix}$ , also  
 $\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 3 \cdot (2 \cdot 10^4 + 1) = 6 \cdot 10^4 + 3$

b) b1)  $\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 - \varepsilon \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$  und b2)  $\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 + 2\varepsilon 10^4 \\ 1 - \varepsilon 10^4 \end{pmatrix}$

c) b1)  $\Delta x_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  also  $\|\delta x_1\|_\infty = \frac{\|\Delta x_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon$   
 und b2)  $\Delta x_2 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon 10^4 \\ -\varepsilon 10^4 \end{pmatrix}$  also  $\|\delta x_2\|_\infty = \frac{\|\Delta x_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2\varepsilon 10^4$

theoretische Schranke:  $\|\delta x\|_\infty = \kappa(A) \|\delta b\|_\infty = (6 \cdot 10^4 + 3)\varepsilon$

für b1) ist die theoretische Abschätzung zu pessimistisch, sie wird nicht angenommen

für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen.

### Lösung 6

a)  $\det(A) = -a(2a^2 - 3)$ ,  $\det(A) = 0$ , falls  $a_1 = 0$  oder  $a_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) i)  $\det(A) \neq 0$ : genau eine Lösung,  $\det(A) = 0$ : keine oder  $\infty$ -viele Lösungen, je nach dem, ob evtl. VB erfüllt sind oder nicht.

ii)  $\det(A) \neq 0$ : nur die triviale Lösung,  $\det(A) = 0$ :  $\infty$ -viele Lösungen.

c) i) Endscheema für  $a = \sqrt{3/2}$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
①	$-\sqrt{3/2}$	1	1
.	①	$-2\sqrt{3/2}$	0
.	.	.	$\sqrt{3/2}$

$0 = \sqrt{3/2}$  der letzten Zeile ist ein Widerspruch, also keine Lösung.

ii) Endscheema:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	1
①	$-\sqrt{3/2}$	1	0
.	①	$-2\sqrt{3/2}$	0
.	.	.	.

$\infty$ -viele Lösungen mit einem freien Parameter:

$x_3 = \mu = \text{freier Parameter}$ ,  $x = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3/2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$

## Lösung 7

$$\text{a) } L_2 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 7 & 17 & 37 & 1 \\ -1 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Vielfache der zweiten Zeile werden zur dritten (5-faches) und vierten (-2-faches) Zeile addiert.

allgemein für  $L_k$ : Vielfache der  $k$ -ten Zeile werden zur  $k+1$ -ten,  $k+2$ -ten, ...,  $n$ -ten Zeile addiert.

$$\text{b) } L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Reserveaufgaben

### Aufgabe 7

### Lösung 8

### Aufgabe 8

a)

b)

### Lösung 9

a)

b)

### Aufgabe 9

### Lösung 10