Klasse ET1b **DMa2 2-te Klausur** 24. Juni 2005

Name:

Aufgabe 1

Um die Gleichung $2x = 2^x$ zu lösen, will man die Iterationsformel

$$x_{n+1} = 2^{x_n - 1}$$

anwenden. Untersuchen Sie, ob und wohin die Iterationsfolge bei verschiedener Wahl von x_0 konvergiert. (Begründung!)
Graphische Darstellung, welcher Fixpunkt ist attrativ, welcher abstossend?

Aufgabe 2

Gesucht ist für $a > 0$ das bestimmte Integral

$$A = \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = 1 + \frac{x^2}{10}$$

a) Bestimmen Sie U_n sowie O_n für eine äquidistante Zerlegung von $[0, a]$.

b) $\lim_{n\to\infty} O_n = ?$

c) Wie gross muss n sein, damit $O_n - U_n < \frac{a^2}{100}$ erfüllt ist?

Aufgabe 3

Es sei m eine reelle Zahl und $|\varepsilon| < 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = m - \varepsilon \sin(x)$$

im Intervall $[m - \pi,\, m + \pi]$ eine eindeutige Lösung hat. (Satz über das Iterationsverfahren $x = F(x)$)

bitte wenden!

Aufgabe 4

Lösen Sie die Kepler'sche Gleichung

$$M = E - \varepsilon\,\sin(E)$$

für die numerischen Werte $\varepsilon = 0.5$ und $M = 2$,

mit der Methode von *Newton*: Startwert $E_0 = M$,

alle Zwischenresultate, auf TR- Genauigkeit.
Ist die Konvergenzbedingung erfüllt? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Was soll unter folgendem Ausdruck verstanden werden?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte, Resultate *exakt*.

b) Welcher Fixpunkt ist attraktiv, welcher abstossend?

c) Bestimmen Sie die entsprechenden *Konvergenzquotienten*.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Gewichte $w_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Integrationsformel

$$Q = w_0\,f\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\,f\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\,f\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\,f\left(\frac{3h}{4}\right)$$

jedes Polynom höchstens $3-$ten Grades auf $[-h, h]$ exakt integriert, *exakte* Angaben.
Testen Sie Q mit $p_3(\xi) = a_0 + a_1\,\xi + a_3\,\xi^3$, $-h \leq \xi \leq h$

DMa2 Lösungen 2-te Klausur

Lösung 1

$F(x) = 2^{x-1}$; $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$ $F'(x) = \frac{\ln(2)}{2}\, 2^x$
$F'(1) = \ln(2) < 1$, d.h. $s_1 = 1$ ist attraktiv
$F'(2) = 2\,\ln(2) > 1$, d.h. $s_2 = 1$ ist abstossend
$x_0 < 1 \longrightarrow s_1$ oder $1 < x_0 < 2 \longrightarrow s_1$
$x_0 > 2$ divergent

Lösung 2

a) $O_n = a + \frac{a^3}{60}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ bzw. $U_n = a + \frac{a^3}{60}\,\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

b) $A = a + \frac{a^3}{30}$

c) $n > 10\,a$

Lösung 3

- $F(x) = m - \varepsilon \sin(x)$ ist stetig auf $I = [m - \pi,\, m + \pi]$
- $\sin(m \pm \pi) = -\sin(m)$, also $F(m \pm \pi) = m + \varepsilon \sin(m)$ d.h. $F(I) \subset I$
- $F'(x) = -\varepsilon \cos(x)$ und somit $|F'(x)| \leq |\varepsilon| < 1$

Lösung 4

Bemerkung zur Gleichung:
Aus dem Flächensatz folgt die gegebene Gleichung, wobei
$E =$ Anomalie, $M =$ mittlere Anomalie und $\varepsilon =$ Exzentrizität.

$0 = E - \varepsilon\,\sin(E) - M$, also $0 = f(x) = x - \varepsilon\,\sin(x) - 2$
$f'(x) = 1 - \varepsilon\,\cos(x)$ und $f''(x) = \varepsilon\,\sin(x)$
$L = |\frac{f(E_0)f''(E_0)}{(f'(E_0))^2}| = 0.141633267\ldots < 1$, d.h. die Konvergenzbedingung ist erfüllt.

E_k	
0	2
1	2.376341956155751
2	2.354305393351647
3	2.354242758736385
4	2.354242758222781 $= E_5$

Lösung 5

Eine Fixpunktiteration $x = F(x)$ mit $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$

a) $x = F(x)$, was $x^2 - x - 1 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_{1.2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ liefert.

b) $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $F'(x_{1.2}) = -\frac{2}{3\pm\sqrt{5}}$ $|F'(x_1)| = \frac{2}{3+\sqrt{5}} < 1$ und $|F'(x_2)| = \frac{2}{3-\sqrt{5}} > 1$, d.h. x_1 ist attraktiv und x_2 ist abstossend.

c) $q = |F'(x_1)| = 0.381\ldots$

Lösung 6

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & + & w_3 & = & 2\,h \\ -3w_0 & - & w_1 & + & w_2 & + & 3w_3 & = & 0 \\ 9w_0 & + & w_1 & + & w_2 & + & 9w_3 & = & \frac{32}{3}\,h \\ -27w_0 & - & w_1 & + & w_2 & + & 27w_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

mit Gauss: $w_0 = w_3 = \frac{13}{24}\,h$ und $w_1 = w_2 = \frac{11}{24}\,h$

$$\int_{-h}^{h} p_3(\xi)\,d\xi = w_0\,p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\,p_3\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\,p_3\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\,p_3\left(\frac{3h}{4}\right)$$

mit

$$\begin{aligned} p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) &= a_0 - a_1\,\frac{3h}{4} - a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(-\frac{h}{4}\right) &= a_0 - a_1\,\frac{h}{4} - a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(\frac{h}{4}\right) &= a_0 + a_1\,\frac{h}{4} + a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(\frac{3h}{4}\right) &= a_0 + a_1\,\frac{3h}{4} + a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

erhält man $a_0\,(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) = a_0\,2h$
Ungerade Potenzen in ξ ergeben über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integriert immer Null.

Lösung 7

a)

b)

c)

d)

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 8

Aufgabe 8

a)

b)

Lösung 9

a)

b)

Aufgabe 9

Lösung 10