Klasse ET1b — **MaE2 - 1-te Klausur** — 11. April 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Gesucht ist $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Kurve $y = f(x) = x^3 - 12x + a$ die $x-$Achse berührt, *alle* Lösungen.

b) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ unterscheidet sich der Wert der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

um weniger als einen Tausendstel von ihrer nicht vertikalen Asymptote?

Aufgabe 2

a) Vereinfachen Sie den trigonometrischen Term soweit wie möglich:

$$\frac{\tan(\delta)}{1-\tan^2(\delta)} + \frac{\cot(\delta)}{1-\cot^2(\delta)}$$

b) Bestimmen Sie *alle* Lösungen der trigonometrischen Gleichung

$$a\,\sin^2(x) + b\,\sin(x) + c = 0 \qquad \text{für} \quad a = 4, b = -4, c = 1$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) von

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung $g'(x)$ von

$$g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} - 3\,\sin(x)$$

Aufgabe 4

a) Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ gibt es Lösungen:

$$4 = b\,(\frac{8}{b} - 1)\,(1 - \sin^2(x))$$

b) Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist $x = \frac{5\pi}{3}$ eine Lösung?

Aufgabe 5

a) Dividieren Sie mit Hilfe des Hornerschemas

$$\big(3x^5 + 10x^4 + 21x^2 - 14x + 120\big) : (x+4)$$

b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\log|x-2| > \frac{1}{2}$$

Aufgabe 6

$$y = f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Vollständige Kurvendiskussion, Nullstellen, Asymptoten, Definitions- und Wertebereich, horizontale Tangenten, Monotonie - und Symmetrie - Eigenschaften.
Stellen Sie $y = f(x)$ graphisch dar. Einheiten: auf beiden Achsen $1 \equiv 4$Häuschen

MaE2 Lösungen 1-te Klausur

Lösung 1

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$, somit $x_{1.2} = \pm 2$ und $f(\pm 2) = \mp 16 + a = 0$ was schliesslich $a = \pm 16$ liefert.

b) Asymptote: $(x^2+1) : (x-1) = x + 1 + \frac{1}{x^2+1}$, also $y = x+1$

$|f(x) - (x+1)| = \frac{2}{|x-1|} < 10^{-3}$, somit $x > 1$: $\frac{2}{x-1} < 10^{-3} \ \Rightarrow \ x > 2001$ und
$x < 1$: $\frac{2}{1-x} < 10^{-3} \ \Rightarrow \ x < -1999$

Lösung 2

a) 0

b) $u := \sin(x)$ und damit: $4u^2 - 4u + 1 = (2u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = \sin(x) = \frac{1}{2}$,
also $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi$ und $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi$

Lösung 3

a) Faktorisierung des Nenners: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$, also
Ansatz für die PBZ: $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$
Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} x^0: & & - & B & + & C & = & 0 \\ x^1: & -A & + & B & & & = & 1 \\ x^2: & A & & & + & C & = & 0 \end{array} \quad \text{mit} \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = C = \frac{1}{2}$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} - 3\cos(x)$$

Lösung 4

a) $b \leq 4$

b) $b = -8$

Lösung 5

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 10 & 0 & 21 & -14 & 120 \\ x=-4 & 0 & -12 & 8 & -32 & 44 & -120 \\ \hline & 3 & -2 & 8 & -11 & -30 & 0 \end{array}$$

also $\left(3x^5 + 10x^4 + 21x^2 - 14x + 120\right) : (x+4) = 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 11x + 30$

b) $|x-2| > 10^{1/2}$, also $x > 2$: $x > 10^{1/2} + 2$ und $x < 2$: $x < 2 - 10^{1/2}$

Lösung 6

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x = \frac{1}{2}$ =Pol oder vertikale Asymptote. $x = 0$ NS, doppelt
Asymptote: $x^2 : (2x-1) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4} + \frac{1/4}{2x-1}$, also $y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}$
$f'(x) = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$, $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$:
horizontale Tangenten $(0,\,0)$ =lokales Maximum und $(1,\,1)$ =lokales Minimum, $W(f) = (-\infty,\,0] \cup [1,\,\infty)$
$S(1/2,\,1/2)$ =Symmetriezentrum, es handelt sich um eine Hyperbel.
Monotonie: $(-\infty,\,0] \cup [1,\,\infty)$ monoton wachsend und $[0,\,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},\,1])$ monoton fallend

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Gesucht ist eine Polynomfunktion $p(x)$ von *möglichst niedrigem* Grad n mit dem Wert $p(0) = 6$ und den Nullstellen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = 2$.
Bestimmen Sie den Grad n und die Koeffizienten dieses Polynoms.

Lösung 7

$p(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, also $n = 3$
$p(x) = a\left(x^2 - 2x - 2\right)(x - 2) = a\left(x^3 - 4x^2 + 2x + 4\right)$, $p(0) = 4a = 6$ und damit: $a = \frac{3}{2}$
schliesslich: $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -6$, $a_1 = 3$ und $a_0 = 6$

Aufgabe 8

a) $f(x) = |x - x_0|$ mit $x_0 > 0$.
Bestimmen Sie die Differenz $d = f(x) - f(2x_0 - x)$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$9^{x+0.5} - 4\sqrt{3} \cdot 3^x + 3 = 0$$

Lösung 8

a) $d = |x - x_0| - |2x_0 - x - x_0| = |x - x_0| - |x_0 - x| = 0$

b)

Aufgabe 9

Schraffieren Sie in der $xy-$Ebene das Gebiet, so dass

$$|x| - y + |x - y| < 2$$

erfüllt ist.

Lösung 9

Fallunterscheidungen: