Klasse ET1b **MaE2 - 2-te Klausur** 20. Mai 2005

Name:

Aufgabe 1

Gesucht ist eine Polynomfunktion $p(x)$ von *möglichst niedrigem* Grad n mit dem Wert $p(0) = 6$ und den Nullstellen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = 2$.
Bestimmen Sie den Grad n und die Koeffizienten dieses Polynoms.

Aufgabe 2

$$g(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \varphi)$$

a) Für welche Phase $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ hat die Summenfunktion $g(t)$ die Amplitude $A = \frac{4}{\sqrt{5}}$

b) Wie gross ist die zu a) gehörige Phase ϑ von $g(t)$, falls gilt:

$$g(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} \sin(\omega t + \vartheta)$$

Resultate in a) und b) *exakt*

Aufgabe 3

a) $y = f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$. Bestimmen Sie den Definitions- sowie den Wertebereich von f.

b) Von der Kurve $y = f(x)$ mit $f(x) = \frac{ax}{x^2+3}$ weiss man, dass der Abstand zwischen den Punkten mit horizontaler Tangente $2\sqrt{6}$ beträgt. Bestimmen Sie a, *alle* Lösungen.

bitte wenden!

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f_a(x) = \cos^2(x)$ b) $f_b(x) = 5\,\sin\left(\sqrt{3x + \cos(x)}\right)$ c) $f_c(x) = \dfrac{4x^3 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

a) und c) so einfach wie möglich, b) ohne Vereinfachung.

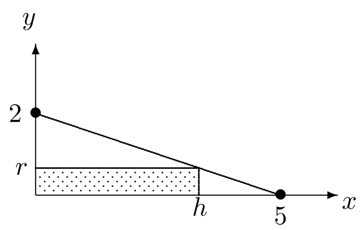
Aufgabe 5

Die Kurve $y = f(x)$ der Funktion $f(x) = |3\,\sin(x) - 2|$ hat Spitzen auf der $x-$ Achse.

a) Stellen Sie $y = f(x)$ im Intervall $[-\pi,\, 2\pi]$ graphisch dar.
Einheiten auf beiden Achsen: $1 \widehat{=} 2$ Häuschen.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Halbtangenten in der Spitze im Intervall $(0,\, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 6



Durch Rotation des schraffierten Rechtecks mit den Seiten r und h um die $x-$ Achse entsteht ein Zylinder.

a) Wie müssen r und h gewählt werden, damit das Zylindervolumen maximal wird?

b) Wie gross ist dieses maximale Volumen?

MaE2 Lösungen 2-te Klausur

Lösung 1

$p(x) = a\,(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, also $n = 3$
$p(x) = a\left(x^2-2x-2\right)(x-2) = a\left(x^3-4x^2+2x+4\right)$, $p(0) = 4a = 6$ und damit: $a = \frac{3}{2}$
schliesslich: $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -6$, $a_1 = 3$ und $a_0 = 6$

Lösung 2

$g(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \varphi) \stackrel{!}{=} A \cdot \sin(\omega t + \vartheta)$
Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rrcl} \sin(\omega t): & \cos(\varphi) & = & A\cdot\cos(\vartheta) \\ \cos(\omega t): & 1+\sin(\varphi) & = & A\cdot\sin(\vartheta) \end{array}$$

a) $A^2 = \frac{16}{5} = 2(1+\sin(\varphi))$, also $\sin(\varphi) = \frac{3}{5}$ und somit $\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

b) $\cos(\varphi) = \frac{4}{5}$, da $\varphi \in (0,\ \frac{\pi}{2})$, also $\tan(\vartheta) = 2$ und schliesslich $\vartheta = \arctan(2)$.

Lösung 3

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ und $W(f) = (-\infty,\ -\frac{4}{9}] \cup (0,\ \infty)$

b) $a = \pm 6$

Lösung 4

a) $f_a'(x) = 2\,\cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -\sin(2x)$

b) $f_b'(x) = 5 \cdot \cos\left(\sqrt{3x+\cos(x)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+\cos(x)}} \cdot (3-\sin(x))$

c) $f_c'(x) = \frac{6(\sqrt{x^5}+1)}{x^2} = 6\sqrt{x} + \frac{6}{x^2}$

Lösung 5

a) Graphik

b) $3\,\sin(x) = 2$, also $\sin(x_1) = \frac{2}{3}$ ist Nullstelle in $(0,\ \frac{\pi}{2})$, in $(0,\ x_1)$: $y = f_1(x) = 2 - 3\,\sin(x)$ und in $(x_1,\ \frac{\pi}{2})$: $y = f_2(x) = 3\,\sin(x) - 2$. $f_1'(x) = -3\,\cos(x)$ und $f_1'(x) = 3\,\cos(x)$; mit $\cos(x_1) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ bekommen wir $f_1'(x_1) = -\sqrt{5} = m_1 = \tan(\varphi_1)$ und $f_2'(x_1) = \sqrt{5} = m_2 = \tan(\varphi_2)$.
$\varphi = \pi - 2\arctan(\sqrt{5})$

Lösung 6

a) $V = r^2\pi\,h$, also mit $r = 2\,\left(1-\frac{h}{5}\right)$: $V = V(h) = 4\pi\left(h - \frac{2h^2}{5} + \frac{h^3}{25}\right)$,
für $0 \leq h \leq 5$
V wird extremal, falls $\frac{d}{dh}\,V(h) = 4\pi\left(1 - \frac{4h}{5} + \frac{3h^2}{25}\right) \stackrel{!}{=} 0$. Lösungen $h_{1.2} = \left\{5,\ \frac{5}{3}\right\}$; es kommt nur $h = \frac{5}{3}$ in Frage, somit V wird *maximal* (ein Minimum kann es nicht sein, da V für die beiden Grenzen von h Null wird), falls $h = \frac{5}{3}$ und $r = \frac{4}{3}$

b) $V_{max} = \frac{80}{27}\pi$

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 7

Aufgabe 8

a) $f(x) = |x - x_0|$ mit $x_0 > 0$.
   Bestimmen Sie die Differenz $d = f(x) - f(2x_0 - x)$

b) Lösen Sie die Gleichung
$$9^{x+0.5} - 4\sqrt{3} \cdot 3^x + 3 = 0$$

Lösung 8

a) $d = |x - x_0| - |2x_0 - x - x_0| = |x - x_0| - |x_0 - x| = 0$

b)

Aufgabe 9

a) Stellen Sie den Bereich $\mathbb{B}$ in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar, für den gilt:
$$|j + z + 1| \leq 3$$

b) Lösen Sie die Gleichung
$$\left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 = j^{-25}$$

Lösung 9

a) $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 9$: das Innere inklusive Kreislinie eines Kreises K mit Mittelpunkt $M(-1, -1)$ und Radius $r = 3$

b) $j^{-25} = \frac{1}{j^{25}} = \frac{1}{j} = -j$ und somit: $(z+j)^2 = (-j) \cdot (z-j)^2$, also $(1+j)\,z^2 + (1+j)\,2z - (1+j) = 0$. Zu lösen ist die quadratische Gleichung $z^2 + 2z - 1 = 0$ und schliesslich $z_{1.2} = -1 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 10

Schraffieren Sie in der $xy-$Ebene das Gebiet, so dass
$$|x| - y + |x - y| < 2$$
erfüllt ist.

Lösung 10

Fallunterscheidungen: