Klasse ET1b **MaE2 - 3-te Klausur** 13. Juni 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Stellen Sie den Bereich $\mathbb{B}$ in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar, für den gilt:

$$|j + z + 1| \leq 3$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$\left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 = j^{-25}$$

Aufgabe 2

Gegeben sind

$y_1 = f_1(t) = 3\,\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad y_2 = f_2(t) = 2\,\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad$ und $\quad y_3 = f_3(t) = 4\,\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

Betrachten Sie folgende Überlagerungen:

a) $y = y_1 + y_2 = f_a(t) = A_1\,\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$
Bestimmen Sie A_1, ω_1 und φ_1.

b) Von der harmonischen Schwingung in a) wird nun $y_3 = f_3(t)$ subtrahiert. Schreiben Sie das Resultat wieder als harmonische Schwingung $f_b(t) = A_2\,\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$
Bestimmen Sie A_2, ω_2 und φ_2.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Parabel mit $y = p_2(x) = a\,x^2$, $a > 0$ und ein Quadrat der Seitenlänge $s = 1$ mit den Eckpunkten $(0,\,0)$, $(1,\,0)$, $(1,\,1)$ und $(0,\,1)$.

a) graphische Darstellung

b) Bestimmen Sie a so, dass die Kurve der Parabel die Quadratfläche halbiert.

bitte wenden!

Aufgabe 4

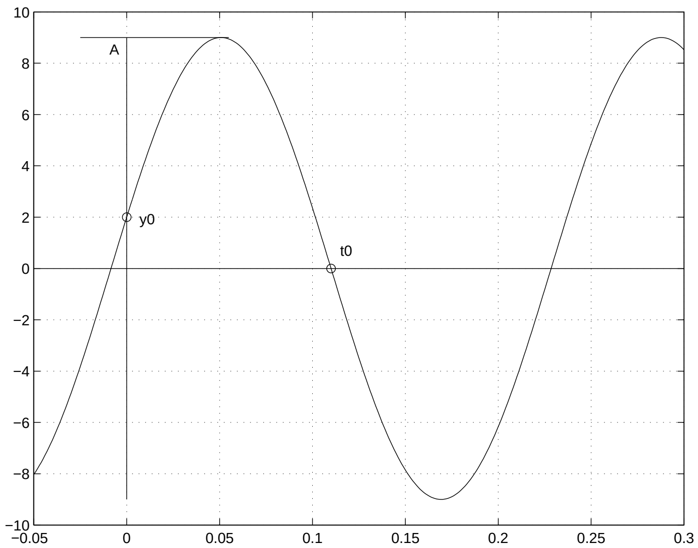
a) Gesucht ist ein Polynom $p_3(x)$ vom Grad 3 so, dass die Kurve $y = p_3(x)$ die $x-$ Achse im Urprung berührt und im Punkt $P(3,\,0)$ die $x-$ Achse unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ geschnitten wird.

b) Wie gross ist das Flächenstück, das von der Kurve $y = p_3(x)$ und ihrer Tangente im Punkt P begrenzt wird?

Aufgabe 5

a) $z_1 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ ist eine Lösung von $z^4 = a$. Bestimmen Sie a und alle übrigen Lösungen. Darstellung aller Lösungen als Zeiger in der Gauss'schen Ebene.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der harmonischen Schwingung $y = A\,\sin(\omega t + \varphi)$. Dabei sind die beiden Punkte $(0,\,y_0)$ und $(t_0,\,0)$ sowie die Amplitude A gegebenen .



Aufgabe 6

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x) = -x\,(x+1)\,(x-2)$ mit $0 \leq x \leq 2$ wird durch zwei Parallelen zur $y-$ Achse an den Stellen $x = b$ und $x = b+1$ mit $b \geq 0$ in drei Teile zerlegt.

Bestimmen Sie b so, dass die Fläche F zwischen den Parallelen maximal wird.

MaE2 Lösungen 3-te Klausur

Lösung 1

a) $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 9$: das Innere inklusive Kreislinie eines Kreises K mit Mittelpunkt $M(-1,\,-1)$ und Radius $r=3$

b) $j^{-25} = \frac{1}{j^{25}} = \frac{1}{j} = -j$ und somit: $(z+j)^2 = (-j)\cdot(z-j)^2$, also $(1+j)\,z^2 + (1+j)\,2z - (1+j) = 0$. Zu lösen ist die quadratische Gleichung $z^2+2z-1=0$ und schliesslich $z_{1.2} = -1 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}$!

Lösung 2

$\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$ für a) und b)

a) $\cos(2t - \frac{\pi}{6}) = \sin(2t + \frac{\pi}{3})$
$y_1 + y_2 = 3\,\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\,\sin(2t + \frac{\pi}{3}) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$
ohne Rechnung: $A_1 = 5$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$
Koeffizientenvergleich ist hier überflüssig! und somit: $f_a(t) = 5\cdot\sin(2t + \frac{\pi}{3})$

b) $\cos(2t - \frac{\pi}{2}) = \sin(2t)$
$y = f_b(t) = f_a(t) - 4\,\sin(2t) = A_2 \cdot \sin(2t + \varphi_2)$
Koeffizientenvergleich:
$\sin(2t):\;\; 5\,\cos(\frac{\pi}{3}) - 4 = A_2\,\cos(\varphi_2)$
$\cos(2t):\;\; 5\,\sin(\frac{\pi}{3}) = A_2\,\sin(\varphi_2)$
woraus man $A_2 = \sqrt{21}$ und $\tan(\varphi_2) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$, also $\varphi_2 = \arctan(-\frac{5\sqrt{3}}{3}) + \pi$ bekommt.

Lösung 3

a) Graphik

b) $a > 1$: $y = a\,x^2 = 1$, woraus man $x_s = \frac{1}{\sqrt{a}}$ bekommt.
Also $\frac{1}{2} = \int\limits_0^{x_2} (1 - a\,x^2)\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{a}}$ und schliesslich $a = \frac{16}{9}$.

Lösung 4

a) $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$: $p_3(0) = a_0 = 0$: und $p_3'(0) = a_1 = 0$, also $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2$. Weiter gilt: $p_3'(3) = 27\,a_3 + 6\,a_2 = 1$ und $p_3(3) = 27\,a_3 + 9\,a_2 = 0$. Schliesslich wird $a_3 = \frac{1}{9}$ und $a_2 = -\frac{1}{3}$, also $p_3(x) = \frac{1}{9}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^2$

b) $t: \;\; y = x - 3$ schneiden mit $y = p_3(x)$, Hornerschema: $x_1 = 3$ ist bekannt, die anderen beiden Lösungen $x_{2.3} = \pm 3$, 3 ist doppelt, da t eine Tangente! Somit: $A = \int\limits_{-3}^{3} [p_3(x) - (x-3)]\;dx = 18 - 6 = 12$

Lösung 5

a) $a = z_1^4 = \left(2 \cdot e^{j3\pi/4}\right)^4 = 16 \cdot e^{j\pi} = -16 = 16 \cdot e^{j(\pi + k\,2\pi)}$ und damit:
$z_k = 2 \cdot e^{j(\pi/4 + k\,\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$
$z_0 = \sqrt{2}\,(1+j)$, $z_1 = \sqrt{2}\,(-1+j)$, $z_2 = \sqrt{2}\,(-1-j)$ und $z_3 = \sqrt{2}\,(1-j)$.
Da $a \in \mathbb{R}$ treten die Lösungen paarweise konjugiert komplex auf: $z_0 = z_3^*$ und $z_1 = z_2^*$.

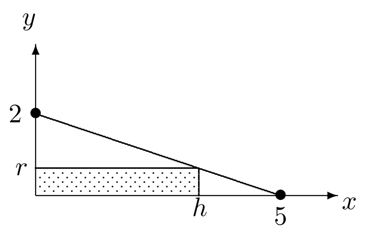
b) $t = 0$: also $y(0) = y_0 = A\sin(\varphi)$ und somit $\varphi = \arcsin\left(\frac{y_0}{A}\right)$,
$\omega\,t_0 + \varphi = \pi$ (gemäss Figur der erste Nulldurchgang der Schwingung für eine positive Zeit), also $\pi - \varphi = \omega \cdot t_0$ woraus $\omega = \frac{\pi - \varphi}{t_0}$ bestimmt werden kann, da „Winkel im Bogenmass gleich ω mal Zeit t“

Lösung 6

$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$, also $F(b) = \int\limits_{b}^{b+1} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx = \left(-\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + x^2\right)\Big|_{b}^{b+1}$
also $F(b) = -b^3 - \frac{1}{2}\,b^2 + 2b + \frac{13}{12}$. Lokale Extrema: $F'(b) = -3b^2 - b + 2 \overset{!}{=} 0$, $\Rightarrow b = \frac{2}{3}$ mit $F''(\frac{2}{3}) = -6 \cdot \frac{2}{3} - 1 < 0$. Es handelt sich somit um ein Maximum.

Reserveaufgaben

Aufgabe 7



Durch Rotation des schraffierten Rechtecks mit den Seiten r und h um die $x-$ Achse entsteht ein Zylinder.

a) Wie müssen r und h gewählt werden, damit das Zylindervolumen maximal wird?

b) Wie gross ist dieses maximale Volumen?

Aufgabe 8

Lösung 7

Aufgabe 9

a) $f(x) = |x - x_0|$ mit $x_0 > 0$.
Bestimmen Sie die Differenz $d = f(x) - f(2x_0 - x)$

b) Lösen Sie die Gleichung
$$9^{x+0.5} - 4\sqrt{3} \cdot 3^x + 3 = 0$$

Lösung 8

a) $d = |x - x_0| - |2x_0 - x - x_0| = |x - x_0| - |x_0 - x| = 0$

b)

Aufgabe 10

Schraffieren Sie in der $xy-$Ebene das Gebiet, so dass

$$|x| - y + |x - y| < 2$$

erfüllt ist.

Lösung 9

Fallunterscheidungen:

Lösung 10

a)

b)

Lösung 11

a)

b)