MaE/DMa - Nachklausur 1. Juli 2005

alle Aufgaben zählen gleich

Aufgabe 1

Die Funktion $f(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{2x} - 12$ hat eine einzige Nullstelle bei etwa $x \simeq 5.5$.
Bilden Sie die Iterationsform

$$x := F(x) = x + k\,f(x) \qquad \text{mit dem Startwert: } x_0 = 5$$

a) Bestimmen Sie k so, dass $F'(5.5) = 0$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von k aus a) x_1, x_2 und anschliessend den Konvergenzquotienten $q \simeq |F'(x_2)|$.

c) Bilden Sie mit dem Δ^2-Verfahren von Aitken x_0' und $q' \simeq |F'(x_0')|$.

Aufgabe 2

In welchem Punkt $P_0(x_0,\, y_0)$ der Kurve mit der Gleichung $y = \ln(x)$ oberhalb der $x-$ Achse muss man die Normale n ziehen, damit das Dreieck, das sie mit der $x-$ Achse und der Vertikalen durch P_0 bildet, *maximalen* Flächeninhalt hat? Wie gross ist dieser maximale Wert? Resultate *exakt*.

Aufgabe 3

Von einer Schwingung ist der folgende Zusammenhang bekannt:

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \beta \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Stellen Sie A als Funktion von β dar.

b) Für welche Werte von β wird $A(\beta)$ minimal? $A_{min} = ?$

c) Wie gross ist die zu b) gehörige Phase $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die beiden ersten Trapezwerte ($0-$ te und $1-$ te Halbierung) für das Integral

$$I = \int_0^3 \left(x^3 - 4x^2 + x + 1\right)\, dx$$

a) Geben Sie für die $1-$ te Halbierung den *maximal* möglichen Fehler an und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.

b) Geben Sie den ersten Simpsonwert S_1 an und geben Sie für diesen Wert den tatsächlichen Fehler an.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie ein Polynom $p(z)$ mit *reellen* Koeffizienten niedrigsten Grades, das $z_1 = 1$, $z_2 = 1 - j$ und $z_3 = -j\sqrt{3}$ als einfache Nullstellen hat.

b) Gesucht sind die Amplitude und die Phase der Superposition (= Überlagerung)

$$f(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Rechnung *komplex*.

Aufgabe 6

Gegeben ist $A(p) = \int_0^{\pi/2} |sin(x) - \sin(p)|\, dx$

a) Graphische Darstellung von $A(p)$ für $p = \frac{\pi}{4}$, Einheiten: $1 \widehat{=} 16$ Häuschen.

b) Berechnen Sie $A(\frac{\pi}{4})$, Resultat *exakt*.

c) Bestimmen Sie allgemein $A(p)$ für $0 \leq p \leq \frac{\pi}{2}$.

d) Bestimmen Sie *alle* Extremalwerte von $A(p)$, Resultate *exakt*.

MaE/DMa Lösungen Nachklausur

Lösung 1

a) $F'(x) = 1 + k \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2x} + \frac{x+2}{2}\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$ und damit $k = -0.35855403138977$

b) $x_1 = 5.33418246468211$, $x_2 = 5.34220576003721$, $q \simeq |F'(x_2)| = 0.01130224251047$, statt der $0.6871...$ der Theorie!

c) $x_0' = 5.34240312768592$ und damit $q' = 0.01128803150682$, etwas besser als q aus b)

Lösung 2

$F(x_0) = \frac{(\ln(x_0))^2}{2x_0}$, Extrema: $F'(x_0) \stackrel{!}{=} 0$, also $2\ln(x_0) \cdot (2 - \ln(x_0)) = 0$ und schliesslich: $x_0 = e^2$ und somit ist der Punkt $P_0(e^2, 2)$, ($x_0 = 1$ kommt nicht in Frage, da $F(1) = 0$). $F_{max} = \frac{2}{e^2}$.

Lösung 3

a) $A(\beta) = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4}$. Mit Koeffizientenvergleich oder der entsprechenden Formel aus Papula (Superposition zweier Harmonischer Schwingungen).

b) Für $\beta = 1$ wird A minimal, $A_{min} = A(1) = \sqrt{3}$

c) $\tan(\varphi) = -\sqrt{3}$, also $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

Lösung 4

a) $T_0 = -6$ und $T_1 = -\frac{123}{16}$, $M = \max\limits_{0 \le x \le 3} |p_3''(x)| = 10$ und somit: $|I - T_1| \le \frac{45}{8}$ = maximal möglicher Fehler.
Tatsächlicher Fehler $|I - T_1| = \frac{18}{8}$, fast dreimal kleiner!

b) $S_1 = \frac{4T_1 - T_0}{3} = -\frac{99}{12}$, tatsächlicher Fehler $= 0$, da $p_3^{(4)}(x) \equiv 0$, Simpson ist *exakt* für Polynome vom Grad ≤ 3

Lösung 5

a) Mit z_k ist auch z_k^* eine Nullstelle, also
$p(z) = k(z-1)(z-z_2)(z-z_2^*)(z-z_3)(z-z_3^*) = k(z-1)(z^2-2z+2)(z^2+3)$, da $z_1 \in \mathbb{R}$, wobei $k \in \mathbb{R}$. D.h.der minimale Grad ist 5.

b) $f(t) = \Im\left(A_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)}\right) = \Im\left(A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right)$, wobei
$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $\varphi = \arg\left(A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j\varphi_2}\right)$

Lösung 6

a) Graphik, mit $p = \frac{\pi}{4}$: Horizontale $y = \sin p = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $A(\pi/4) = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(x)\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,dx = -1 + \sqrt{2}$

c) $A(p) = \int\limits_0^p \sin(p) - \sin(x)\,dx + \int\limits_p^{\pi/2} \sin(x) - \sin(p)\,dx = 2\cos(p) + 2p\sin(p) - \frac{\pi}{2}\sin(p) - 1$, $0 \le p \le \frac{\pi}{2}$

d) $A'(p) = \cos(p)(2p - \frac{\pi}{2}) \stackrel{!}{=} 0$: Extrema für $p = \frac{\pi}{4}$ und $p = \frac{\pi}{2}$.
lokales Minimum: $A(\pi/4) = \sqrt{2} - 1$, lokales Maximum: $A(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - 1$ und absolutes Maximum: $A(0) = 1$.