Vorschläge/ung

VD Aufgaben 2005 Numerik, LinAlg

ohne TR

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie X aus folgender Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ hat $Ax = c$ maximalen Rang, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Wie gross ist dieser maximale Rang?

mit TR

Aufgabe 2

Die Gleichung $4x^3 - 3x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ hat drei Lösungen.

a) Gleichung in der Form $h(x) = g(x)$, um für die *Bisektion* geeignete Intervalle zu bestimmen (graphische Darstellung)

b) Anzahl Wiederholungen der Bisektion für $5-$stellige Genauigkeit, falls $|b - a| = 0.5$

c) Bestimmen Sie *sämtliche* Nullstellen mit der Methode von *Newton*, *alle* Zwischenresultate.

d) Falls Sie die gegebene Gleichung als Fixpunktiteration formulieren: welche der Fixpunkte sind *attraktiv*, welche *abstossend*, *mit* Begründung, Satz über die Fixpunkt–Iteration.

Aufgabe 3

Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{3} w_k \, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -h,\ -\frac{h}{3},\ \frac{h}{3},\ h$$

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k so, dass alle Polynome bis höchstens Grad 3 exakt integriert werden.

b) Setzen Sie speziell $h = 1$ und benutzen Sie die gefundene Quadraturformel, um

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

wobei $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) = \sin(x)$, zu integrieren.

Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

VD Aufgaben 2005 Vektorgeometrie

mit TR

Aufgabe 4

Von eniem Quader ist die Kante AB gegeben, während man von den anderen von A ausgehenden Kanten AD bzw. AE weiss, dass D auf der Geraden $g = g(P, Q)$ und E in der Ebene $\varepsilon : \ x + y - z + 5 = 0$ liegt.

Dabei sind $A(-2,\, -4,\, -4)$, $B(2,\, 4,\, 4)$, $P(4,\, 2,\, -2)$ und $Q(5,\, 4,\, 1)$.
Bestimmen Sie das Volumen des Quaders.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfs der durch die Ebene $\varepsilon : \ x + 2y - 7z + 8 = 0$ von der Pyramide mit den Ecken $A(4,\, 3,\, 0)$, $B(-1,\, 1,\, 0)$, $C(0,\, 5,\, 0)$ und $S(2,\, 7,\, 6)$ abgeschnitten wird.

Lösung 1

a)

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $det(A) = -(b-1)\,(b-a) \neq 0$, d.h. $b \neq 1 \wedge a \neq b$, max. Rang $r_{max} = 3$

Lösung 2

a) $3x = 3x^3 + \frac{1}{2}$

b)

$$n > \ln \left| \frac{0.5}{5 \cdot 10^{-6}} \right| \frac{1}{\ln(2)} = 16.609\ldots \qquad \text{also} \quad n = 17$$

c) NS exakt (Kreisteilungspolynom): $s_k = \sin\left(\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$

d) $|F'(s_0)| < 1$ attraktiv, $|F'(s_k)| > 1$, $k = 1, 2$ abstossend, je nach Numerierung der NS.

Lösung 3

a) $w_0 = w_3 = \frac{h}{4}$ und $w_1 = w_2 = \frac{3h}{4}$

b) $I = 1$

$$Q = \frac{b-a}{2} \left\{ \frac{h}{4}\, f(a) + \frac{3h}{4}\, f\left(\frac{4a+2b}{6}\right) + \frac{3h}{4}\, f\left(\frac{2a+4b}{6}\right) + \frac{h}{4}\, f(b) \right\}$$

$Q = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{8}\right) = 1.0010049233\ldots$
$\Delta = 0.0010049233\ldots$ bzw. rel. Fehler $= 0.10049233\ldots\%$

Lösung 4

$$g:\ \vec{r} = \overrightarrow{OP} + \mu\,\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \ \Rightarrow\ \mu = -2$ und somit: $D(2,\,-2,\,-8)$,
bleibt Punkt $E(x_E,\,y_E,\,z_E)$ zu bestimmen:
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ und $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $E \in \varepsilon$
zu lösendes Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_E & + & 2y_E & + & 2z_E & = & -18 \\ 2x_E & + & y_E & - & 2z_E & = & 0 \\ x_E & + & y_E & - & z_E & = & -5 \end{array} \right.$$

Lösung: $x_E = 4$, $y_E = -10$ und $z_E = -1$, also $E(4,\,-10,\,-1)$
Volumen:

$$\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AE} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| = 648$$

Lösung 5

Volumen der Pyramide mit gemischtem Produkt

$$V_{Stumpf} = V_{Pyramide} - V_{pyramide} \qquad V_{pyramide} = \text{von } \varepsilon \text{ abgeschnittene Pyramide}$$

Die Geraden $g = g(A,\,S)$, $h = h(B,\,S)$ und $k = k(C,\,S)$ sind mit der Ebene ε zu schneiden.
$A_1(3,\,5,\,3) = g \cap \varepsilon$, $B_1(0,\,3,\,2) = h \cap \varepsilon$ und $C_1(1,\,6,\,3) = k \cap \varepsilon$
$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}| = 18$ und
$V_{pyramide} = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}) \cdot \overrightarrow{A_1S}| = \frac{8}{3}$, also $V_{Stumpf} = \frac{46}{3}$