Klasse DP04a **NMMa3 - 1-te Klausur** 24. November 2005

Name:

Aufgabe 1 *adaptive Integration*

Wie klein muss das erste, bzw. wie gross darf das letzte Teilintervall bei der Berechnung von

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^4}\, dx$$

sein, falls eine Genauigkeit von $\varepsilon > 0$ eingehalten werden muss. Dabei wird die Trapezmethode verwendet.

Aufgabe 2 *Unterraum*

a) Wir betrachten die folgenden Teilmengen T_i $i = 1, 2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^4$

   i) $T_1 = \left\{ (a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \middle| a_1 \neq 0 \right\}$

   ii) $T_2 = \left\{ (a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)^T \in \mathbb{R}^4 \middle| a_1 + a_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 + a_4 = 0 \right\}$

   Welche dieser Teilmengen ist ein Unterraum in $\mathbb{R}^4$?

b) Sei $C[-1,\, 1]$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen, die auf dem Intervall $[-1\, 1]$ definiert sind. Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen $X_k,\ k = 1, 2$ ein Unterraum von $C[-1,\, 1]$ ist.

   i) $X_1 = \left\{ f \in C[-1,\, 1] \middle| f(x) = -f(-x) \right\}$

   ii) $X_2 = \left\{ f \in C[-1,\, 1] \middle| f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{für} \quad a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 3 *linear abhängig bzw. linear unabhängig, erzeugend*

a) Bestimmen Sie in den beiden folgenden Fällen, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind und ob sie erzeugend sind:

   i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome jeweils eine Basis in $\mathbb{P}_3$ (dem Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 3) bilden:

   i) $x - 7$, x^2, 9 und $2x^3 - x^2$

   ii) $x^2 - 5$, 5, $2x^2$ und $x^3 - 2x^2$

bitte wenden

Aufgabe 4 *Kern und Bild*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $A - I_3$.

Aufgabe 5 *lineare Abbildung*

Sei $\mathbb{P}_2 =$ Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0,\, 2]$.
Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : \ \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}(p))(x) := x \cdot p'(x) - p(2 - x)$$

a) Betrachten Sie die Monome als Erzeugendensystem und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von F.

Aufgabe 6 *Zusammensetzung*

Betrachten Sie die Spiegelung $\mathcal{S}_1$ an der Ebene $E_1 : \ x_2 = x_3$ sowie die Spiegelung $\mathcal{S}_2$ an der Ebene $E_2 : \ x_2 = -x_3$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen S_1 und S_2 dieser Spiegelungen bzgl. der Standardbasis Σ_e.

b) Betrachten Sie die Zusammensetzung $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ und bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix S.

c) Sind die beiden Abbildungen in b) vertauschbar? (*mit* Begründung)

d) Können Sie die Abbildung $\mathcal{S}$ aus b) als Rotation schreiben? (*mit* Begründung)

Lösungen der ersten NMMa3 Klausur 24.11.05

Lösung 1

a) erstes Teilintervall $[1,\, 1+h_1]$: Trapezmethode $\int\limits_1^{1+h_1} \frac{1}{x^4}\, dx \leq \frac{h_1}{12}\, h_1^2\, M_1 < \varepsilon$,

wobei $M_1 = \max\limits_{1 \leq x \leq 1+h_1} |f''(x)| = 20$ mit $\left(f''(x) = 20 \cdot \frac{1}{x^6}\right)$, also $h_1 < \sqrt[3]{\frac{3}{5}\,\varepsilon}$

b) letztes Teilintervall $[2-h_n,\, 2]$: Trapezmethode $\int\limits_{2-h_n}^{2} \frac{1}{x^4}\, dx \leq \frac{h_n}{12}\, h_n^2\, M_n < \varepsilon$, wobei $M_n = 20 \cdot \frac{1}{(2-h_n)^6}$

und somit $\frac{h_n}{(2-h_n)^2} < \sqrt[3]{\frac{3}{5}\,\varepsilon}$

Setze $a := \sqrt[3]{\frac{3}{5}\,\varepsilon}$ woraus wir $\frac{h_n}{a} < (2-h_n)^2$ erhalten und schliesslich $h_n \leq (2 + \frac{1}{a}) - \frac{\sqrt{8a+1}}{2a}$

Lösung 2

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^4$, d.h. $x^T = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$ und $y^T = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$

i) $x_1 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$: $(x+y)^T = (x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_3+y_3,\, x_4+y_4) \Rightarrow x+y \notin T_1$, da $x_1+y_1 = 0$, falls $x_1 = -y_1$, d.h. T_1 ist kein Unterraum.

ii) $x_1 + x_3 = 0$ und $x_2 + x_4 = 0$ sowie $y_1 + y_3 = 0$ und $y_2 + y_4 = 0$
$x+y$: $(x_1+x_3) + (y_1+y_3) = 0$ und $(x_2+x_4) + (y_2+y_4) = 0$ ist somit in Ordnung
αx: $\alpha(x_1+x_3) = 0$ und $\alpha(x_2+x_4) = 0$ gilt ebenso, d.h. T_2 ist ein Unterraum.

b) Seien f und g aus $C[-1,\, 1]$

i) $f(x) = -f(-x)$ und $g(x) = -g(-x)$
$f+g$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f+g)(-x)$ ist also in Ordnung
αf: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha(-f(-x)) = -\alpha f(-x) = -(\alpha f)(-x)$ ist ebenso in Ordnung,
d.h. X_1 ist ein Unterraum, X_1 ist der Unterraum der ungeraden Funktionen.

ii) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$
$f+g$: $f(x) + g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2$
$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 = (f+g)(x)$ ist somit in Ordnung
μf: $\mu f(x) = \mu\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \mu a_0 + \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 = (\mu f)(x)$ ist ebenso in Ordnung,
d.h. X_2 ist ein Unterraum.
(X_2 = Projektion von $C[-1,\, 1]$ auf den VR der Polynome 2−ten Grades.)

Lösung 3

a) mit dem Gauss-Algorithmus:

i) $A = (a^{(1)},\, a^{(2)},\, a^{(3)}) = 4 \times 3-$ Matrix, $Rang(A) = 2$, d.h. die drei Vektoren sind linear abhängig
z.B. $-2a^{(1)} - a^{(2)} + 3a^{(3)} = 0$ oder $Ax = 0$ für $x^T = \mu(-2,\, -1,\, 3)$
drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$ können nicht erzeugend sein!

ii) $A = (a^{(1)},\, a^{(2)},\, a^{(3)},\, a^{(3)}) = 3 \times 4-$ Matrix
vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig, d.h. $Rang(A) \leq 3$
hier: $Rang(A) = 3$, d.h. die vier Vektoren sind erzeugend, die ersten drei $a^{(1)},\, a^{(2)},\, a^{(3)}$ z.B. genügen, sie bilden sogar eine Basis.

b) Basis von $\mathbb{P}_3$: Monome $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$ und $e_4 = x^3$

i) $b_1 = x - 7$, $b_2 = x^2$, $b_3 = 9$ und $b_4 = 2x^3 - x^2$
Falls durch LK der b_k die e_k hergestellt werden können, haben wir eine Basis (diese LK muss eindeutig sein):
$e_1 = \frac{1}{9}\, b_3$, $e_2 = b_1 + \frac{7}{9}\, b_3$, $e_3 = b_2$ und $b_4 = \frac{1}{2}\,(b_4 + b_2) \Rightarrow$ wir haben eine Basis in $\mathbb{P}_3$

ii) $b_1 = x^2 - 5$, $b_2 = 5$, $b_3 = 2x^2$ und $b_4 = x^3 - 2x^2$
$e_1 = \frac{1}{5}\, b_2$, $e_2 = x = ...$ kann nicht als LK mit den gegebenen b_k hergestellt werden!
Da das Monom x fehlt, haben wir hier keine Basis in $\mathbb{P}_3$

Lösung 4

$B := A - I_3$

$Kern(B) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Das Bild von B wird von der ersten und zweiten Spalte von B aufgespannt, also

$$Bild(B) = span\left\{b^{(1)}, b^{(2)}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Lösung 5

a) $(\mathcal{F}(e_1))(x) = -1 = -e_1$, $(\mathcal{F}(e_2))(x) = -2 + 2x = -2e_1 + 2e_2$ und $(\mathcal{F}(e_3))(x) = -4 + 4x + x^2 = -4e_1 + 4e_2 + e_3$, somit

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Kern(F) = 0$, da F regulär. Das Bild von F wird von den drei Spalten von F aufgespannt:

$$Bild(F) = span\left\{f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

d.h. $Bild(\mathcal{F}) = \mathbb{P}_2$

Lösung 6

a)

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) durch nachrechnen: $S = S_2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2$

d) $S = D_x$ mit $\varphi_x = \pm\pi$: Drehung um die x_1- Achse, Drehwinkel $\pm\pi$