Klasse DP04a **NMMa3 - zweite Klausur** 12. Januar 2006

Name:

Aufgabe 1

Sei C der Vektorraum aller stetigen Funktionen:

a) Behauptet wird, dass die Funktionen

$$f_k(t) := \cos^k(t) \qquad 0 \leq k \leq 3$$

und die Funktionen

$$g_k(t) := \cos(kt) \qquad 0 \leq k \leq 3$$

denselben Unterraum U von C erzeugen. Prüfen Sie diese Behauptung nach. Wie gross ist die Dimension von U.

b) Ein Designer erhält von der Swisscom den Auftrag, die Hintergrundmusik der Telephonzentrale zu installieren. Dazu stehen ihm drei Tongeneratoren zur Verfügung, die Töne mit der Frequenz $1000Hz$, $2000Hz$ und $4000Hz$ mit beliebiger, aber konstanter Lautstärke erzeugen können, d.h. er kann Töne

$$\alpha_1 \cdot \cos(1000t) \qquad \alpha_2 \cdot \cos(2000t) \qquad \alpha_3 \cdot \cos(4000t)$$

generieren. Die Swisscom wünscht als „Musik" die Schwingung $f(t) = \cos^2(2000t) - \sin^2(1000t)$. Wie muss der Designer die Lautstärken α_1, α_2 und α_3 wählen?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ b, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ -b, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

$2\pi-$ periodisch fortgesetzt ($f \notin C[-\pi, \pi]$).

a) Graphische Darstellung von $y = f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Grössen $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$ für $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

c) Bestimmen Sie die Grössen $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$ für $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

Eine Ebene E durch den Nullpunkt ist orthogonal zu $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix P bzgl. der Standardbasis Σ_e der orthogonalen Projektion auf E.

b) Geben Sie eine neue Basis Σ_{neu} an, so dass die Abbildungsmatrix P_{neu} möglichst einfach wird.

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie $\Phi(t) := e^{tA}$.

Aufgabe 5

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 6x_1 + 9$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Aufgabe 6

Bezüglich der Standardbasis Σ_e ist der linearen Abbildung $\mathcal{F}: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zugeordnet. Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine neue Basis Σ_{neu} im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\mathcal{T}: \ \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$ und ihre Inverse T^{-1}.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F_{neu} bzgl. Σ_{neu}.

c) Ein Punkt P hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $(1, 2)$: bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ in der neuen Basis Σ_{neu}.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von P in der alten Basis Σ_e und daraus die Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_e. Transformieren Sie die so erhaltenen Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ zu Koordinaten bzgl. Σ_{neu} und vergleichen Sie das erhaltene Resultat mit demjenigen von c).

Lösungen der zweiten NMMa3 Klausur 12.01.06

Lösung 1

a) einerseits ist

$U = span\,\{f_0,\, f_1,\, f_2,\, f_3\} = span\,\{1,\, \cos(t),\, \cos^2(t),\, \cos^3(t)\}$

und andererseits

$U = span\,\{g_0,\, g_1,\, g_2,\, g_3\} = span\,\{1,\, \cos(t),\, \cos(2t),\, \cos(3t)\}$

Mit den Additionstheoremen der Trigonometrie:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

erhalten wir: $g_2 = \cos(2t) = 2\cdot\cos^2(t) - 1 = 2\cdot f_2 - f_0$ und

$g_3 = \cos(3t) = \cos(2t)\cdot\cos(t) - \sin(2t)\cdot\sin(t) = \ldots = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) = 4\cdot f_3 - 3\cdot f_1$

d.h. die Behauptung ist richtig und $dim(U) = 4$

b) mit dem Additionstheorem für $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$:

$\cos^2(2000t) = \frac{1}{2}(\cos(4000t)+1)$ und $-\sin^2(t) = -(1-\cos^2(1000t)) = -1 + \frac{1}{2}(\cos(2000t)+1)$, also

$f(t) = \frac{1}{2}\cos(4000t) + \frac{1}{2}\cos(2000t)$: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ und $\alpha_3 = \frac{1}{2}$

Zerlegung einer gegebenen Funktion $f(t)$ gemäss Fourier: Fourier- oder trigonometrisches Polynom.

Lösung 2

a) graphische Darstellung, f ist eine ungerade Funktion!

b) $a_k = 0$ für *alle* k

c)

$$b_k = \begin{cases} (-\frac{2b}{\pi})\cdot\frac{1}{k}\,, & k \text{ ungerade} \\ 0\,, & k \text{ modulo } 4 \equiv 0 \\ (-\frac{2b}{\pi})\cdot\frac{2}{k}\,, & k \text{ gerade und } k \text{ modulo } 4 \neq 0 \end{cases}$$

Lösung 3

$P = I_3 - \frac{aa^T}{a^Ta} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ $P_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$, da alle Vektoren parallel zu a auf den Null abgebildet werden (EW $= 0$) und alle Vektoren in der Ebene E fest bleiben (EW $= 1$).

Σ_{neu} wird z.B. aufgespannt von den Vektoren: $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 \in E$ und $b_2 \perp a$

$b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 \in E$ und $b_3 \perp a$

Lösung 4

EWP von A: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -5$ mit den zugehörigen EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, also

neue Basis: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5\,e^{2t} + 2\,e^{-5t} & e^{2t} - e^{-5t} \\ 10\,e^{2t} - 10\,e^{-5t} & 2\,e^{2t} + 5\,e^{-5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es gilt: $\Phi(0) = I_2$ und $\Phi(-t) = e^{-tA} = \Phi^{-1}(t)$, d.h. $\Phi(t) \cdot \Phi(-t) = I_2$

Lösung 5

EWP von $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$; es handelt sich um eine Ellipse, da beide EW positiv sind.

Neue Basis Σ_{neu}, o.n.: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = D_\varphi$, mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und somit $D = T^T A T = diag(\lambda_1,\, \lambda_2)$.

Kegelschnitt bzgl. Σ_{neu}

$$\frac{1}{2}\, x_{neu_1}^2 + \frac{3}{2}\, x_{neu_2}^2 - \frac{6}{\sqrt{2}}\, x_{neu_1} + \frac{6}{\sqrt{2}}\, x_{neu_2} + 9 = 0$$

Mit quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(x_{neu_1}^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}\, x_{neu_1} \right) + \frac{3}{2} \left(x_{neu_2}^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\, x_{neu_2} \right) + 9 &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(x_{neu_1} - \frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(x_{neu_2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 &= 3 \end{aligned}$$

also

$$\frac{\left(x_{neu_1} - \frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2}{6} + \frac{\left(x_{neu_2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} = 1 \qquad a = \sqrt{6} \qquad b = \sqrt{2}$$

$M_{neu}\left(\frac{6}{\sqrt{2}},\, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right)$ und $M_{alt}(4,\, 2)$, somit haben wir neben der Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ eine Translation mit $\vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung 6

a) $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $det(T) = 1$

b) $F_{neu} = T^{-1} F T = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_{neu}: $y_{neu} = F_{neu} \cdot x_{neu} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, wobei $x_{neu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $x_{alt} = T x_{neu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_e: $y_{alt} = F_{alt} \cdot x_{alt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $F_{alt} = F$

$y_{alt} = T y_{neu}$, somit $y_{neu} = T^{-1} y_{alt} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, was mit dem Resultat von c) übereinstimmt.