Klasse DP04a **NMMa3 - dritte Klausur** 16. Februar 2006

Name:

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

$\dddot{x} - \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$

a) Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung $3-$ ter Ordnung als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des in a) bestimmten Systems.

c) Wie müssen die AB $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in b) gewählt werden, damit die Lösungen für $t \longrightarrow \infty$ gegen Null streben?

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) = -x\,y(x)$ mit der AB $y(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung dieses AWP's.

b) Bestimmen Sie mit der Taylormethode die Lösung approximativ. Dabei soll das Verfahren die Ordnung $p = 4$ haben.

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*

Gegeben ist das Dgl-System $\dot{y} = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und den AB $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) analytische Lösung

b) Approximation mit Heun, Schrittweite $h > 0$, fest. Geben Sie die dafür benötigte Rekursion an.

c) Geben Sie für b) y_1 nach dem ersten Schritt an.

d) Wie gross darf $h > 0$ maximal gewählt werden, damit das Verfahren in b) stabil ist?

bitte wenden

zweiter Teil: mit MATLAB

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = 1.2\,x - x^2 - \frac{xy}{x+0.2} \qquad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{1.5\,xy}{x+0.2} - y \qquad (2)$$

beschreibt ein Räuber-Beute Modell der Biologie, wobei $x(t)$ eine Masszahl für die Anzahl der Beutetiere und $y(t)$ eine Masszahl für die Anzahl der Raubtiere bedeuten.

Für die beiden folgenden Anfangsbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0.75 \end{array} \right. \qquad \text{und} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & 0.75 \\ y(0) & = & 0.25 \end{array} \right.$$

a) ist das System mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung im Intervall $0 \le t \le 30$ mit der fixen Schrittweite $h = 0.1$ zu lösen.

b) Vergleich mit der Methode von Euler auch für $h = 0.1$.

c) Wie gross ist hier die Steifigkeit $S(t)$, *ohne* Rechnung, *mit* Begründung.

Stellen Sie die Lösung in der $xy-$ Phasenebene graphisch dar ($x-$ Achse horizontal und $y-$ Achse vertikal), Interpretation der numerischen Lösungen.

Lösungen der dritten NMMa3 Klausur 16.02.06

Lösung 1

a) Substitution: $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ und $y_3 = \ddot{x}$. Damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Entkopplung: EWP von A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 \overset{!}{=} 0$
$\lambda_1 = 1$ mit dem Hornerschema, $\lambda_{2.3} = \pm\sqrt{2}$,
Eigenräume: $E_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $E_{\sqrt{2}} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}\}$, $E_{-\sqrt{2}} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}\}$

$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t} v^{(3)}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$

c) für die gewählte Numerierung: $c_1 = c_2 = 0$ und $c_3 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

c_1 und c_2 müssen Null werden, mit Gauss erhalten wir das folgende Endschema:

c_1	c_2	c_3	1
1	1	1	α
.	1	1	$\gamma - \alpha$
.	.	$-2\sqrt{2}$	$\beta - \alpha - (\sqrt{2} - 1)(\gamma - \alpha)$

rückwärts eingesetzt:

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha - c_2 - c_3 \\ c_2 &= \gamma - \alpha - c_3 \\ c_3 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (\gamma - \alpha) - (\sqrt{2} - 1)(\beta - \alpha) \right\} \end{aligned}$$

also muss

(3) $$c_1 = 2\alpha - \gamma = 0$$

(4) $$c_2 = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{4}(\beta + \gamma) - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha = 0$$

gelten (zwei Bedingungen an drei freie Parameter: z.B. $\beta = -\sqrt{2}\alpha$ und $\gamma = 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Lösung 2

a) Die Differentialgleichung ist separierbar und homogen.
Methode der Separation mit den AB liefert: $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

b) Taylor: $y(x) = y(x_k) + c_1(x - x_k) + c_2(x - x_k)^2 + c_3(x - x_k)^3 + c_4(x - x_k)^4 + \ldots$
$y'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_k) + 3c_3(x - x_k)^2 + 4c_4(x - x_k)^3 + \ldots$ und damit
$y(x_{k+1}) = y(x_k) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \ldots \approx y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \ldots$
$y'(x_{k+1}) \approx c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \ldots$

einsetzen

$$c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \ldots \stackrel{!}{=} -(x_k + h)\,\big(y_k + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \ldots\big)$$

und Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{lrcll}
h^0: & c_1 & = & -x_k y_k & \qquad c_1 = (-y_k)\,x_k \\
h^1: & 2c_2 & = & -(x_k c_1 + y_k) & \qquad c_2 = (-\frac{y_k}{2})\,(1 - x_k^2) \\
h^2: & 3c_3 & = & -(x_k c_2 + c_1) & \qquad c_3 = (-\frac{y_k}{3})\,(-\frac{3x_k}{2} - \frac{x_k^2}{2}) \\
h^3: & 4c_4 & = & -(x_k c_3 + c_2) & \qquad c_4 = (-\frac{y_k}{4})\,(-\frac{1}{2} + x_k^2 - \frac{x_k^4}{6})
\end{array}$$

Lösung 3

a) EWP der System-Matrix: $\lambda_{1.2} = 1 \pm \sqrt{2}$ mit den EV $v^{(1.2)} = \mu \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

allg. Lösung der homogenen Dgl: $y_h(t) = c_1 e^{(1+\sqrt{2})t} v^{(1)} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})t} v^{(2)}$

AB: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$.

b) Heun:

$$\begin{aligned}
k_1 &= Ay_k \\
k_2 &= A(y_k + hk_1) = Ay_k + hA^2y_k \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\{k_1 + k_2\} = y_k + hAy_k + \frac{h^2}{2}A^2y_k \qquad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

c) $y_1 = y_0 + hAy_0 + \frac{h^2}{2}A^2y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h - 2h^2 \\ -1 - h - \frac{3h^2}{2} \end{pmatrix}$

d) für die Stabilität ist nur der negative EW entscheidend: $-2 < h(1 - \sqrt{2}) < 0$, also $0 < h < \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

Lösung 4

a) Programm

b) Interpretation:

- mit den ersten AB spiralt die Lösung nach innen im Gegenuhrzeigersinn.
- mit den zweiten AB spiralt die Lösung nach aussen, im Gegenuhrzeigersinn.

Für beide AB nähert sich die Lösung einem stabilen Grenzzyklus.

c) $S(t) = 1$, da es sich um ein schwingendes System handelt. EW sind konjugiert komplex, also sind die Realteile der beiden EW gleich gross.

weitere Aufgaben

Aufgabe 5

Kondition in Abhängigkeit eines Parameters

a)

b)

Aufgabe 6

Stabilitätsgebiete zweier Methoden

a) impliziter Euler, impliziter Runge Kutta, ein-stufig

b) Trapez

c) Vergleich der beiden Gebiete, Feststellung