
Name:

Aufgabe 1

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto y = Ax \in \mathbb{R}^m$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis Σ_e.

a) $n =$? $m =$? und $Rang(A) =$?

b) $dim(Kern(A)) =$? Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von A.

c) $dim(Bild(A)) =$? Bestimmen Sie eine Basis für das Bild von A.

Aufgabe 2

a) Wir betrachten den Vektorraum der Polynome vom Grad 3. Sind die gegebenen Polynome linear unabhängig bzw. linear abhängig? Sind Sie erzeugend?

a1) $\{1,\, 2x^2,\, x^2+2\}$

a2) $\{4,\, 3x-1,\, 2x^2+1,\, x^3-1\}$

b) Gegeben ist der Vektorraum der Polynome vom Grad $2: P_2 = span\{1,\, x,\, x^2\}$ auf dem Intervall $[-1,\, 1]$ mit $(p,\, q)_k: \; P_2 \times P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$(p,\, q)_1 := \int_{-1}^{1} p'(x) q'(x)\, dx$$

$$(p,\, q)_2 := p(0) \cdot q(0) + \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} p'(x) q'(x)\, dx$$

$$(p,\, q)_3 := p(0) \cdot q(0) + p'(0) \cdot q'(0) + p''(x) \cdot q''(x)$$

b1) welches der definierten Produkte $(p,\, q)_k$ ist ein Skalarprodukt?

b2) Geben Sie die Matrix der Werte $(x^i,\, x^j)_k$, $i, j = 0, 1, 2$ und $k = 1, 2, 3$ an, d.h. $(x, y)_k = x^T A_k y$

Aufgabe 3

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_b: \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_c: \; c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e: \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Transformation T_{eb} von Σ_e nach Σ_b, d.h. $\Sigma_e \longrightarrow \Sigma_b$ an.

b) Geben Sie die Transformation T_{ec} von Σ_e nach Σ_c, d.h. $\Sigma_e \longrightarrow \Sigma_c$ an.

c) Geben Sie die Transformation T_{bc} von Σ_b nach Σ_c, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_c$ an. (Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$ bzgl. Σ_e und $\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b$ bzgl. Σ_b.

Gesucht sind diese Vektoren bzgl. der anderen Basen.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die implizite Mittelpunktregel

$$k_1 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\, k_1) \tag{1}$$

$$y_{k+1} = y_k + h\, k_1 \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet dieser Methode.

b) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = 0$$
$$x(0) = \alpha$$
$$\dot{x}(0) = \beta$$

Bestimmen Sie für dieses Problem mit Hilfe von a) die Schrittweiten h so, dass die Methode stabil wird. Feststellung?.

Aufgabe 5

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ für $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 32.6 & 35.7 \\ 0 & -48 & 9 \\ 0 & 9 & -72 \end{pmatrix} \quad \text{und den Anfangsbedingungen:} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie dieses System mit Hilfe des EWP von A, (EW und EV *exakt*).

b) Zur numerischen Lösung dieses Systems soll das klassische RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

verwendet werden. Es soll $4-$ stellige Genauigkeit erreicht werden. Wie müssen die Schrittweiten gewählt werden?

Aufgabe 6

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} - 5y = 0 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = -1 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \frac{1}{2}$$

a) Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung $3-$ter Ordnung als lineares System $\dot{z} = Az$ von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Approximieren Sie $z(h)$ mit der Trapezmethode für $h = 0.5$.

Lösungen der Modul-Nachprüfung in NMMa3 (DP04a) 22.03.06

Lösung 1

a) $n = 7$, $m = 4$, $Rang(A) = r = 3$ mit Gauss-Algorithmus

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	1
1	2	3	0	0	1	2	0
.	1	3	1	1	2	1	0
.	.	.	.	.	1	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.

b) $dim(Kern(A)) = 4 = n - r =$ Anzahl freie Parameter,nämlich: $x_7 = \mu_1$, $x_5 = \mu_2$, $x_4 = \mu_3$ und $x_3 = \mu_4$, also $x = \mu_4 b_4 + \mu_3 b_3 + \mu_2 b_2 + \mu_1 b_1$, wobei

$$b_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Kern(A) = span\,\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

c) $dim(Bild(A)) = r = 3$ Pivot-Spalten spannen das Bild von A auf: $Bild(A) = span\left\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(6)}\right\}$, wobei

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) a1) Die drei gegebenen Polynome sind linear abhängig, nicht erzeugend.

a2) Die gegebenen Polynome sind linear unabhängig, erzeugend.

b) $(p, q)_1$ ist kein Skalarprodukt, da für $p \equiv 1$ ist $p'(x) = 0$ und somit $(p, p)_1 = 0$ obwohl $p \neq 0$

$(p, q)_2$ und $(p, q)_3$ sind Skalarprodukte: positiv definit und symmetrisch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bei A_1 ist positiv definit verletzt

Lösung 3

a)

$$T_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$T_{ec} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $T_{bc} : \Sigma_b \xrightarrow{T_{eb}^{-1}} \Sigma_e \xrightarrow{T_{ec}} \Sigma_c$, also

$$T_{bc} = T_{eb}^{-1}\, T_{ec} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{ec}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_b = T_{eb}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$ und

$\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e = T_{eb} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -12/3 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e$

Lösung 4

a) $y' = \lambda y$ und somit $k_1 = \lambda \left(y_k + \frac{h}{2}\, k_1\right) = \lambda y_k + \frac{h\lambda}{2}\, k_1$, also

$$k_1 = \frac{1}{1 - \frac{h\lambda}{2}}\, \lambda y_k \qquad y_{k+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \cdot y_k$$

mit $z := h\lambda$ erhält man schliesslich

$$R(z) = \frac{2+z}{2-z}$$

Stabilitätsgebiet: $|R(z)| < 1$, was für $\Re(z) < 0$ erfüllt ist, d.h. die Methode ist absolut stabil.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. $det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$, somit $\lambda_{1.2} = \pm j\omega$ rein imaginär. $h\lambda \in \Im(z)$, bzw. $\Re(h\lambda) = 0$! Methode funktioniert trotzdem, obwohl $|R(z)| = 1$!

Lösung 5

a) EWP von A: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -45$ und $\lambda_3 = -75$
zugehörige EV:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und somit: allgemeine Lösung:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 x} \cdot v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 x} \cdot v^{(3)}$$

Bestimmung der c_k mit den AB: $c_1 = 15$, $c_2 = 4$ und $c_3 = -1$ und schliesslich:

$$y(x) = 15 \cdot e^{(-1/2x)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot e^{(-45x)} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{(-75x)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Anfangsschrittweite h_1 : $F(h\lambda) := 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}$ muss mit $e^{(-75h_1)}$ $5-$ stellig übereinstimmen!

$$\left| \frac{h_1^5(-75)^5}{5!} \right| < 5 \cdot 10^{-6} \qquad \text{Restglied der Taylorreihe}$$

Diese Schrittweite h_1 muss solange verwendet werden, bis $e^{(-75h_1)n_1}$ klein genug, d.h. $e^{(-75h_1)n_1} < 5 \cdot 10^{-6}$, also $h_1 = 0.0030239...$ und $n_1 = 54$ und somit $x_1 = n_1 h_1 = 0.172929...$

Ab x_1 darf eine Schrittweite $h_2 > h_1$ verwendet werden: obige Überlegung muss nun mit $e^{(-45h_2)}$ gelten. Hier wird $h_2 = 0.005039...$ und $n_2 = 54$ und damit $x_2 = n_2 h_2 = 0.2721....$

Ab $x_1 + x_2$ darf eine Schrittweite $h_3 > h_2$ verwendet werden: obige Überlegung muss nun mit $e^{(-0.5h_3)}$ gelten. Dies ergäbe $h_3 = 0.4535...$ was aber im Widerspruch zur Stabilität wäre, $\mu = h_3(-75) \notin \mathbb{S}$ (da immer das ganze System integriert wird, *keine* Entkopplung).

Die maximal mögliche Schrittweite muss

$$-2.78 < h(-75) < 0$$

erfüllen, also $0 < h < 0.037$

Lösung 6

a) Sei $z_1 := y$, $z_2 := \dot{y}$ und $z_3 := \ddot{y}$: damit erhalten wir

$$\dot{z} = Az \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Trapezmethode: $z(h) - z(0) = \frac{h}{2}\,(A \cdot z(0) + A \cdot z(h))$, wir haben ein *lineares* System!

$$z(h) = \left(I_3 - \frac{h}{2}\,A\right)^{-1} \left(I_3 + \frac{h}{2}\,A\right) \cdot z(0)$$

wobei

$$\left(I_3 - \frac{h}{2}\,A\right)^{-1} = \frac{1}{det(I_3 - \frac{h}{2}\,A)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{4} & \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} & \frac{h^2}{4} \\ \frac{5h^2}{4} & 1 + \frac{h}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{5h}{2} & -\frac{3h}{2} + \frac{5h^2}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

mit $det(I_3 - \frac{h}{2}\,A) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{4} - \frac{5h^3}{8}$.

$h = \frac{1}{2}$: $\left(I_3 - \frac{h}{2}\,A\right)^{-1} = \frac{1}{87} \begin{pmatrix} 92 & 20 & 4 \\ 20 & 80 & 16 \\ 80 & -28 & 64 \end{pmatrix}$ und $\left(I_3 + \frac{h}{2}\,A\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und somit

$$z(0.5) = \frac{1}{87} \begin{pmatrix} 92 & 20 & 4 \\ 20 & 80 & 16 \\ 80 & -28 & 64 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -31 \\ -8 \\ -93 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.0690 \\ -0.2759 \\ -1.6034 \end{pmatrix}$$