Klasse DP05a **NMMa1 - 1-te Klausur** 21. Dezember 2005

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Aufgabe 1**

Gegeben sind die 4 Matrizen $A$, $B$, $C$ und $d$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie , falls möglich, die folgenden Produkte:

$$AB, \quad BA, \quad d^T d, \quad dd^T, \quad BC, \quad (BC)^T, \quad C^T B^T, \quad d^T((dd^T)d)$$

**Aufgabe 2**

a) Schreiben Sie $s$ mit Hilfe des Summenzeichens $\Sigma$ in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\dots} \dots$

$$s = \frac{16 \cdot 25}{14} + \frac{32 \cdot 27}{17} + \frac{64 \cdot 29}{20} + \ldots + \frac{2^{200} \cdot 417}{602}$$

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 3 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

**Aufgabe 3**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
Gesucht ist $B$ so, dass gilt:

$$A^T B + BA^2 = -C$$

Wieviele Lösungen gibt es?

**Aufgabe 4**

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ hat das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & + & 2tz & = & 0 \\ 4tx & & & + & z & = & 2t+3 \end{array} \right.$$

a) genau eine

b) keine, oder

c) $\infty-$ viele Lösungen?

Geben Sie für alle Fälle, falls möglich, die entsprechenden Lösungen (mit der Anzahl freier Parameter) an.

**Aufgabe 5**

$$\text{a) } s_a = \sum_{k=1}^{10} \left( \sum_{n=1}^{2k} (k \cdot n) \right) \qquad \text{b) } s_b = \sum_{n=1}^{N} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (a-1)a^k \right) \quad a \neq 1$$

**Aufgabe 6**

$$\text{Gegeben sind} \quad \sum_{l=1}^{15} (3x_l - 4) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=-3}^{11} (2x_{i+4} - 2)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht ist die Summe} \quad s = \sum_{k=4}^{18} \left\{ x_{k-3} + (-1) \cdot \sum_{j=1}^{15} (1 - 3x_j)^2 \right\}$$

**NMMa1    Lösungen 1-te Klausur    21.12.05**

## Lösung 1

$AB = \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ -8 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $BA$ ist nicht definiert, $d^T d = 9$, $dd^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \\ 5 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$,

$(BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -6 \\ -4 & -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, $C^T B^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -6 \\ -4 & -2 & -6 & 8 \end{pmatrix} = (BC)^T$, $d^T((dd^T)d) = 81$

## Lösung 2

a)

$$s = \sum_{k=1}^{197} \frac{2^{3+k}\,(25 + (k-1)\cdot 2)}{14 + (k-1)\cdot 3} = \sum_{k=1}^{197} \frac{8 \cdot 2^k\,(23 + k \cdot 2)}{11 + k \cdot 3}$$

b) Endschema:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | -2 | 2 |
| . | 1 | -2 | 3 | -1 |
| . | . | 7 | -6 | 5 |
| . | . | . | . | 2 |

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

## Lösung 3

Endschema:

| $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -1 | 1 | 0 | -3 |
| . | 5 | 0 | 1 | 12 |
| . | . | -1 | -1 | -5 |
| . | . | . | 2 | -6 |

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

## Lösung 4

Endschema:

| x | y | z | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 1 |
| . | 1 | $(2t-1)$ | -1 |
| . | . | $(1-6t)(1-2t)$ | $3(1-2t)$ |

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t=\frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0=2$ ist ein Widerspruch!

c) $t=\frac{1}{2}$, Rang $r=2$, $z=\mu=$ freier Parameter, $y=-1$ und $x=2-\frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

**Lösung 5**

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10}\left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n\right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N}\left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \sum\limits_{n=1}^{N}(a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

**Lösung 6**

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15}(x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

**Lösung 7**

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

**Lösung 8**

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left( x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$