
Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & bx_3 & = & 2+a \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2a-1-b \end{array}\right.$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge von Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

c) Wann hat das gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die **positiven** Grössen a, b, c, d, e und f so, dass

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & d \\ a & b & e \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & f \end{pmatrix}$$ orthogonal ist, d.h. dass $C^T C = I_3$.

b) Was erhalten Sie für $C\,C^T$?

c) Lösen Sie mit C aus a) das lineare Gleichungssystem $Cx = rhs$ mit $rhs = (1,\ 0,\ -1)^T$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Fassen Sie jede der obigen Matrizen als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welches der Tableaus weist Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie die jeweiligen Formen an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Welche der Lösungsmengen sind leer?

b) Fassen Sie nun jede der obigen Matrizen als Tableau zweier linearer Gleichungssysteme $Ax = b_k$ mit zwei rechten Seiten b_1 und b_2 auf. Diese beiden Gleichungssysteme wurden simultan gelöst. Beantworten Sie die gleichen Fragen wie unter a).

bitte wenden

Aufgabe 4 *LR - Zerlegung, Diagonal-Strategie*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 5

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

Aufgabe 6 *LR - Zerlegung, relative Kolonnen-Maximum-Strategie*

Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegungen von

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Matrizen L, R und falls nötig, P an.

NMMa1 Lösungen 2-te Klausur 08.02.06

Lösung 1

a) $a = 0$ und $b = 1$: $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ und $x_1 = 2 - \nu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $a \neq 0$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 2 - a - \mu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $a \neq 0$ und $b \neq 1$

Lösung 2

a) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e = f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$, also

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

b) $CC^T = I_3$, da $C^{-1} = C^T$ und eine Matrix mit ihrer Inversen vertauschbar ist.

c) $x = C^T rhs = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) U ist weder in `ref` noch in `rref`.

`ref` von U: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$: Permutation der Zeilen drei und vier.

`rref` von U: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ die vier oberhalb der führenden eins muss weg.

$r = Rang(A) = 3$, $\mathbb{L} = \{\ \}$, die letzte Zeile ist ein Widerspruch!

V ist in `rref`, $r = Rang(A) = 3$, $\mathbb{L} = \{\ \}$, die letzte Zeile ist auch ein Wid.

b) U ist in `rref`, $r = Rang(A) = 2$, $\mathbb{L}_1 = \{\ \}$ und $\mathbb{L}_2 = \{\ \}$, da die Zeilen drei und vier je einen Wid. darstellen!

V ist in `rref`: $r = Rang(A) = 3$, $\mathbb{L}_2 = \{\ \}$, da die vierte Zeile ein Wid. ist

Lösung 4

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix}$

b) 1. Schritt: Vorwärtseinsetzen, also $Lc = b$, $c^T = (0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/2 \quad 2/5)$
2. Schritt: Rückwärtseinsetzen, somit $Rx = c$, $x^T = (-2/3 \quad -4/3 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/3)$

Lösung 5

a) $A = L \cdot R$ ist eine $n \times n-$Matrix, alle Elemente i.allg. verschieden von Null, also vollbesetzt.

b) $1-te$ Zeile: $1+1+1+\ldots = n \cdot 1$
$2-te$ Zeile: $1+2+2+2+\ldots = 1+(n-1)\cdot 2$
$3-te$ Zeile: $1+2+3+3+3\ldots = 1+2+(n-2)\cdot 3$
$4-te$ Zeile: $1+2+3+4+4\ldots = 1+2+3+(n-3)\cdot 4$

$j-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(j-1)+(n-j+1)\cdot j$

$n-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(n-1)+n$

somit Rechenaufwand: $n \cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 3 + \ldots + 1 \cdot n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\cdot k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

zudem : $(n-1)\cdot 1 + (n-2)\cdot 2 + (n-3)\cdot 3 + \ldots 1 \cdot (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\cdot k = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

insgesamt: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} k^2$, d.h. $O(n) = \frac{n^3}{3}$

also doppelt so gross, wie wenn zwei untere bzw. obere Dreiecksmatrizen miteinander multipliziert würden.

Lösung 6

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4/3 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.