Klasse DP05a /WS 05/06 /ung

NMMa1 Klausur-Aufgaben

Aufgabe 1

a) $\kappa_H(x) = \left|\frac{x \cdot H'(x)}{H(x)}\right| = \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$, $\kappa_H(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$ für $x \longrightarrow \infty$

b) naiv: $H(10^9) = 3.16 \cdot 10^{-5}$,
raffiniert: $H(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$ und damit $H(10^9) = 3.16227765859 \cdot 10^{-5}$

Aufgabe 2

a) $A^T = -A$, $det(A^T) = (-1)^3 \cdot det(A)$ und somit:
$det(A) = (-1)^3 \cdot det(A) = -det(A) = 0$

b) $H_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ H_3 ist eine sogenannte Householdermatrix, vgl. p32, Skript Lineare Algebra. $H_3^T = H_3$, $H_3^{-1} = H_3^T$, $H_3^2 = I_3$ $det(H_3) = -1$, H_3 ist eine Spiegelung an der Ebene durch Null orthogonal zu u.

Aufgabe 3

a) $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ S ist orthogonal: $S^{-1} = S^T$, S ist symmetrisch: $S^T = S$, S ist eine Spiegelung: $S^2 = I_3$, $det(S) = -1$

b) $\Sigma_{neu} : b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $S_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) $1 - \alpha\beta \neq 0$, d.h. $\alpha\beta \neq 1$

b) vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch: $\alpha\beta = 1$ und $\beta^3 \neq 1$

c) vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch:
$\alpha\beta = 1$ und $\beta^3 = 1$, $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$
$r = 2$: ein freier Parameter, x_3 ist frei: $x_3 = \mu$
(zwei freie Parameter ist nicht möglich)
Lösung: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix}$

b) vorwärts: $Lc = b$, $c^T = (0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/2 \quad 2/5)$
rückwärts: $Rx = c$, $x^T = (-2/3 \quad -4/3 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/3)$

Aufgabe 6

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$