Klasse DP05a **Labor - Klausur** 16. Februar 2006

Name:

Aufgabe 1 *(10 Punkte: 4, 4, 2)*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{\frac{2}{x^2+1}} - \frac{1}{x^2 - 27} - x$$

auf dem Intervall $I = [-5, 5]$.

a) Benützen Sie Ihre *eigene* Polynom-Interpolation, insbes. Ihren *eigenen* Gauss-Algorithmus, um $f(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit den Stützstellen $-5, -4, \ldots, 4, 5$ zu interpolieren. Geben Sie die Kondition der System-Matrix A an.

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $f(x)$ graphisch dar (inkl. Stützstellen mit Stützwerten als kleine Kreise).

c) Stellen Sie in zwei separaten Bildern die absoluten Fehler $|p_n(x) - f(x)|$ 'nomal' und halblogarithmisch dar.

Aufgabe 2 *(14 Punkte: 2, 6, 6)*

Gegeben ist eine tridiagonale $n \times n-$Matrix A, wobei auf der Diagonalen $\alpha = 2 + \delta$, $\delta > 0$, klein, und auf den Nebendiagonalen -1 stehen. (Ausnahmen: $a_{11} = a_{nn} = 1$)
Sei nun $n = 10$.

a) Definieren Sie die Matrix A in Abhängigkeit von δ auf möglichst einfache Weise. Dabei soll δ von 10^{-1} in Zehnerpotenzen bis nach 10^{-15} hinunter variieren.

b) Bestimmen Sie mit *Ihrem* Gram-Schmidt die QR-Zerlegung von A. Dabei ist Q orthogonal und R eine obere Dreiecksmatrix. In R stehen spaltenweise die Skalarprodukte, die Sie beim Gram-Schmidt bestimmen.

c) Überprüfen Sie die Qualität dieser Zerlegung in Abhängigkeit der in a) gewählten δ:
$\left\|Q \cdot Q^T - I_n\right\|$, $\left\|Q^T \cdot Q - I_n\right\|$, Kondition von A und $\|Q \cdot R - A\|$
Alle vier Grössen halblogarithmisch in einem `subplot(2,2,..)`.

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Ihrer numerischen Ableitung die Punkte mit horizontalen Tangenten der Funktion

a) $f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x)$

b) $f_b(x) = 2x + |-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3|$

c) Stellen Sie die Funktion mit den Punkten mit horizontaler Tangente graphisch dar

d) Überprüfen Sie die Qualität der numerischen Ableitung (halblogarithmische Graphik)

Aufgabe 4

Auslöschung:

Vermeiden Sie bei der Berechnung von

a) $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\cos(1'') - 1$, wobei $1'' =$ eine Bogensekunde

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - 1') - 1$, wobei $1' =$ eine Bogenminute

die Auslöschung

Aufgabe 5

a)

b)

c)