Klasse DP05a **NMMa1 - 1-te Klausur** 21. Dezember 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die 4 Matrizen A, B, C und D

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B = (1 \;\; 2 \;\; -3) \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie *alle* möglichen Produkte zweier Matrizen.

b) Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{11}

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie s mit dem Summenzeichen

$$s = 1 - \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3\, x - 3 \cdot 4\, x^2 + 4 \cdot 5\, x^3 - 5 \cdot 6\, x^4 \pm \ldots\right)$$

mit $n + 1$ Summanden.

b) Bestimmen Sie folgende Produkte

$$\text{i) } p_5 = \prod_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{k} + 1\right) \qquad \text{ii) } p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} + 1\right)$$

Aufgabe 3

Zu den Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $C = 12 \cdot I_2$ bestimme man B so, dass gilt:

$$A^T B + BA = -C$$

Was hat B für Eigenschaften?

Aufgabe 4

a) Berechnen sie die Grössen

$$\text{i) } z = \sum_{k=2}^{6}\left(\prod_{i=2}^{k}(i-1)\right) \qquad \text{ii) } s = \left\{\sum_{k=-7}^{-3}(k+3)^2\right\}^2$$

b) Wie gross muss n sein, damit

$$\sum_{k=1}^{n}(k+4) = 95$$

Aufgabe 5

L is eine untere $n \times n-$Dreiecksmatrix und U eine obere $n \times n-$Dreiecksmatrix.

a) Was ensteht bei der Multiplikation von L mit U? Gibt es Null-Elemente?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand bei dieser Matrizenmultiplikation (*nur* die Anzahl Multiplikationen).

Aufgabe 6

$$\text{Gegeben:} \quad \sum_{k=1}^{17}(4x_k + 2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=-1}^{15}(2x_{j+2} - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht:} \quad s = \sum_{i=1}^{17}\left\{x_i + 3 \cdot \sum_{k=1}^{17}(1 - 2x_k)^2\right\}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Summe

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} 2k \right)$$

Aufgabe 8

$$\text{Gegeben:} \quad \sum_{j=1}^{20} (5x_j - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{20} (4x_j - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht:} \quad s = \sum_{k=1}^{20} \left\{ 2x_k - 3 \cdot \sum_{j=1}^{20} (-x_j + 1)^2 \right\}$$

NMMa1 Lösungen 1-te Klausur 21.12.05

Lösung 1

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $BD = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^T$, $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

A^2, B^2, BA, AC, DB, CD, und DC sind nicht definiert.

b) $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$, $A^4 = I_2$, $A^5 = A$, $\ldots$ $A^8 = I_2$, $A^9 = A$, $A^{10} = -I_2$ und $A^{11} = -A = A^T$, d.h. A ist schiefsymmetrisch.

Lösung 2

a)

$$s = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k k(k+1)x^{k-1}$$

b) i) $p_5 = 3$ und ii) $p_n = \frac{n+1}{2}$

Lösung 3

$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = B$, d.h. B ist symmetrisch.

Lösung 4

a) i) $z = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$ und
ii) $s = \left((-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2\right)^2 = 30^2 = 900$

b) $\frac{n(n+1)}{2} + 4n = 95$, also $n^2 + 9n - 190 = (n+19)(n-10) = 0$ und damit $n = 10$, da $n > 0$ sein muss.

Lösung 5

a) $A = L \cdot U$ ist vollbesetzt, es gibt keine Nullen (i. allg.).

b)
$$\begin{array}{lll}
1-te \text{ Zeile:} & 1+1+1+1+\ldots+1 & = n\cdot 1 \\
2-te \text{ Zeile:} & 1+2+2+2+\ldots+2 & = 1+(n-1)\cdot 2 \\
3-te \text{ Zeile:} & 1+2+3+3+\ldots+3 & = 1+2+(n-2)\cdot 3 \\
\ldots & & \\
i-te \text{ Zeile:} & 1+2+\ldots+(i-1)+i\ldots+i & = 1+2+\ldots+(i-1)+(n-i+1)\cdot i \\
n-te \text{ Zeile:} & 1+2+\ldots+n & = 1+2+\ldots+1\cdot n
\end{array}$$

Aufwand: $\sum\limits_{i=1}^{n}(n-i+1)\cdot i$ und $\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{i-1}k\right)$ mit Summation horizontal oder

$\sum\limits_{i=1}^{n}(n-i+1)\cdot i$ und $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)\cdot i$ mit Summation vertikal

Gesamtaufwand: $\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3} = \sum\limits_{k=1}^{n}k^2$

Lösung 6

$$\sum_{k=1}^{17}x_k = -\frac{17}{2} \qquad \sum_{j=1}^{17}x_j^2 = -\frac{51}{4} \quad \text{(wird aber nicht gebraucht)} \qquad s = -\frac{17}{2}$$

Lösung 7

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 8

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$