Klasse DP2a **NMMa3 - 1-te Klausur** 09. Dezember 2004

Name:

Aufgabe 1

Eine Ebene E durch den Nullpunkt ist orthogonal zu $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix S bzgl. der Standardbasis Σ_e der Spiegelung an E

b) Geben Sie eine neue Basis Σ_{neu} an, so dass die Abbildungsmatrix S_{neu} möglichst einfach wird.

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ a & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie – in Abhängigkeit des Parameters a – zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Für welche Werte von a ist die Matrix A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 3

Sei $P_2 =$ Vektorraum derPolynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0, 1]$
Eine *lineare* Abbildung $\mathcal{F} : \; P_2 \longrightarrow P_2$ ist definiert mit

$$(\mathcal{F}(p))(x) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

a) Betrachten Sie die Monome als Erzeugendensystem und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern dieser Abbildung.

c) Für welche $p(x)$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$?

bitte wenden

Aufgabe 4

$V = C^1[-1,0]$, seien $p(x),\ q(x) \in V$

a) Ist durch

$$(p,q) := p(0) \cdot q(-1) + \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} p'(x) \cdot q(x) dx$$

ein *Skalarprodukt* definiert? Begründung!

b) Sind im Vektorraum der Polynome P_2 die Funktionen f_1, f_2 und f_3 *linear abhängig* oder *linear unabhängig*? Begründung!

i) $f_1(x) = x^2 + 1 \quad f_2(x) = (x+1)^2 \quad f_3(x) = (x-1)^2$
ii) $f_1(x) = (x+2)^2 \quad f_2(x) = (x+1)^2 \quad f_3(x) = (x-1)^2$

Aufgabe 5

$$\left\{ \begin{array}{lcccccc} \dot{x}_1 & = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 & & & + & 2x_3 \\ \dot{x}_3 & = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \end{array} \right.$$

a) Lösen Sie das gegebene Differentialgleichungssystem durch Entkopplung. (Hornerschema für die EW)

b) Für welche Anfangsbedingungen streben alle Lösungen gegen Null?

Aufgabe 6

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 26x_1 - 4x_2 + 5$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Lösung 1

a) $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, S ist orthogonal: $S^{-1} = S^T$, $S = S^T$, symmetrisch, $S^2 = I_3$, da S eine Spiegelung beschreibt.

b) Σ_{neu}: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T = (b_1, b_2, b_3)$ spaltenweise
$S_{neu} = T^{-1}ST = diag(1, 1, -1)$

Lösung 2

a) $\lambda_{1.2} = 6$, doppelter EW und $\lambda_3 = -2, einfacher EW$

b) $\lambda_3 : v^{(3)} = (-1,\ \frac{a}{8},\ 1)^T$
$\lambda_{1.2}$: $a \neq 0$, nur *ein* EV: $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also $v^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)^T$, geom VF $= 1 <$ alg VF $= 2$
$\lambda_{1.2}$: $a = 0$, zwei linear unabhängige EV, nämlich $x_1 = x_3$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also $v^{(1)} = (1,\ 0,\ 1)^T$ und $v^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)^T$, geom VF $=$ alg VF $= 2$

c) A ist diagonalisierbar genau dann, wenn geom VF $=$ alg VF für jeden EW, d.h. für $a = 0$.

Lösung 3

Basis $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1-x = e_1-e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1-2x-x^2 = e_1-2e_2-e_3$ und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Kern(F) = 0$ und $Bild(F) = P_2$, da F regulär.

c) EWP von F, d.h. $Fx = \lambda x$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2.3} = -1$
$v^{(1)} = \mu\,(1,\ 0,\ 0)^T$, $p_1(x) = \alpha$, $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$
$v^{(2)} = \mu\,(1,\ -2,\ 0)^T$, $p_2(x) = \alpha(1-2x)$, $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 4

a) nein, denn $(p,q) \neq (q,p)$

b) $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$
i) linear abhängig:
$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$
ii) lin unabhängig:
$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$

Lösung 5

a) EWP von der System-Matrix A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$
EW $p_A(\lambda) = 0$, mit Horner: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$
$E_{-1} = span\left\{(1,\ -2\ 0)^T, (0,\ -2,\ 1)^T\right\} = span\left\{v^{(1)}, v^{(2)}\right\}$ und $E_8 = span\left\{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)^T\right\} = span\left\{v^{(3)}\right\}$,
also $x_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^{-t} v^{(2)} + c_3 e^{8t} v^{(3)}$

b) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $c_3 = 0$.

Lösung 6

a) EWP von $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, Ellipse, da $det(A) = 36$, $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_2 = 4$

b) EV $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ und damit $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, orthogonal, $x = Ty$
T ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arctan(-2)$, ($\tan(\varphi) = -2$)
Kegelschnitt bzgl. im neuen Koordinatensystem:

$$9\,(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 4\,(x_2 - \frac{7}{\sqrt{5}})^2 = 36$$

somit $a = 2$ und $b = 3$.
$M_{neu}(\frac{1}{\sqrt{5}}/\frac{7}{\sqrt{5}})$ und $M_{alt}(3/1)$, also Translation $\vec{t} = (3,\ 1)^T$