Klasse ET04b **DMa3 2-te Klausur** 14. Februar 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Standardbasis Σ_e.

Bilden Sie in dieser Basis die Matrix $H_3 = I_3 - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$.
Zählen Sie einige wichtige Eigenschaften von H_3 auf (*mit* Begründung).

b) Was für eine Abbildung $\mathcal{F}: \ x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto y = H_3 \cdot x \in \mathbb{R}^3$ erhalten Sie mit dieser Matrix? (geometrische Interpretation)

c) Geben Sie ein neue Basis Σ_{neu} so an, dass die Matrix in der neuen Basis möglichst einfach wird.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende Differentialgleichungs-System

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1 & = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 & & & + & 2x_3 \\ \dot{x}_3 & = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \end{array} \right.$$

a) Lösen Sie (1) durch Entkopplung.

b) Für welche Anfangsbedingungen streben alle Lösungen von (1) gegen Null?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$(2) \qquad \ddot{x} + 0.2\,\dot{x} + 2.01x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) *exakte* Lösung des Systems in a).

c) Approximieren Sie die Lösung aus b) mit der Methode von Euler, (Schrittweite $h > 0$).
Geben Sie die dafür benötigte Rekursion an. Führen Sie einen Schritt aus.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\Phi(t) := e^{tA}$.

b) Lösen Sie mit a) das AWP $\dot{x} = Ax$ mit den AB $x(0) = x_0 = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ a & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie – in Abhängigkeit des Parameters a – zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Für welche Werte von a ist die Matrix A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

Bezüglich der Standardbasis Σ_e ist der linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zugeordnet. Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine neue Basis Σ_{neu} im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\mathcal{T} : \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$ und ihre Inverse T^{-1}.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F_{neu} bzgl. Σ_{neu}.

c) Ein Punkt P hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $(1, 2)$: bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ in der neuen Basis Σ_{neu}.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von P in der alten Basis Σ_e und daraus die Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_e. Transformieren Sie die so erhaltenen Koordinaten von $\mathcal{F}(P)$ zu Koordinaten bzgl. Σ_{neu} und vergleichen Sie das erhaltene Resultat mit demjenigen von c).

Lösungen der zweiten DMa3 Klausur 14.02.06

Lösung 1

a) $H_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ H_3 ist eine sogenannte Householdermatrix.

$H_3^T = H_3$, $H_3^2 = (I_3 - 2\cdot\frac{u\cdot u^T}{u^T\cdot u})\cdot(I_3 - 2\cdot\frac{u\cdot u^T}{u^T\cdot u}) = I_3$, also $H_3^{-1} = H_3^T$, $det(H_3) = -1$.

b) H_3 ist eine Spiegelung an der Ebene E durch Null orthogonal zu u.

c) $\Sigma_{neu} : b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 \perp b_1$ und $b_3 \perp b_1$, $b_2 \in E$ und $b_3 \in E$, für die Komponenten von b_k, $k = 1, 2$

muss also $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ gelten: z.B. $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

in Σ_{neu} erhalten wir $H_{3_{neu}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 2

a) EWP der System-Matrix A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$,
EW, $p_A(\lambda) = 0$, mit Horner: $\lambda_{1.2} = -1$, alg VF $= 2$ und $\lambda_3 = 8$, alg VF $= 1$.

besser: $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)\cdot\{(3-\lambda)(\lambda - 4) + 20\} = (\lambda + 1)\cdot\left\{-\lambda^2 + 7\lambda + 8\right\} = (\lambda + 1)^2(8 - \lambda)$

$E_{-1} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF $= 2$ und $E_8 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF $= 1$, also

$x_h(t) = c_1\, e^{-t} v^{(1)} + c_2\, e^{-t} v^{(2)} + c_3\, e^{8t} v^{(3)}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$

b) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

mit Gauss $9\,c_3 = 2\alpha + \beta + 2\gamma \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0$
$c_1 = \alpha = -\frac{1}{2}(\beta + 2\gamma)$, $c_2 = \gamma$, wobei $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Lösung 3

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.01 & -0.2 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -0.1 \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{2}$ mit den EV $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ und somit

$y_h(t) = 2\, e^{-0.1\,t}\left(a\cos(\sqrt{2}t) - b\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2\, e^{-0.1\,t}\left(b\cos(\sqrt{2}t) + a\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

AB: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2b\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{\sqrt{2}}{40} \end{array}\right.$ und schliesslich

$y_h(t) = e^{-0.1\,t}\left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{20}\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} + e^{-0.1\,t}\left(-\sin(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{20}\cos(\sqrt{2}t)\right)$

c) Euler: $y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei hier $f(x, y) := Ay$, also

$y_{k+1} = y_k + h\,A\,y_k$ mit $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ somit: $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h\,A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2h \end{pmatrix}$

Lösung 4

a) EWP von A: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -5$ mit den zugehörigen EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$,

also neue Basis: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5\,e^{2t} + 2\,e^{-5t} & e^{2t} - e^{-5t} \\ 10\,e^{2t} - 10\,e^{-5t} & 2\,e^{2t} + 5\,e^{-5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es gilt: $\Phi(0) = I_2$ und $\Phi(-t) = e^{-tA} = \Phi^{-1}(t)$, d.h. $\Phi(t) \cdot \Phi(-t) = I_2$

b) $x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 = 5e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösung 5

a) $\lambda_{1.2} = 6$ ein doppelter EW und $\lambda_3 = -2$ ein einfacher EW

b) $\lambda_3 = -2$: EV $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{a}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, geom VF($\lambda_3$) = alg VF($\lambda_3$) $= 1$

$\lambda_{1.2} = 6$:

- $a \neq 0$, nur ein EV. $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = \mu \in \mathbb{R}$, also
  $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, geom VF($\lambda_{1.2}$) $= 1 <$ alg VF($\lambda_{1.2}$) $= 2$

- $a = 0$, zwei linear unabhängige EV, nämlich $x_1 = x_3$ und $x_2 = \nu \in \mathbb{R}$, also
  $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, geom VF($\lambda_{1.2}$) = alg VF($\lambda_{1.2}$) $= 2$

c) A ist diagonalisierbar genau dann, falls geom VF = alg VF für jeden EW, d.h. für $a = 0$.

Lösung 6

a) $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $det(T) = 1$

b) $F_{neu} = T^{-1}FT = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_{neu}: $y_{neu} = F_{neu} \cdot x_{neu} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, wobei $x_{neu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $x_{alt} = Tx_{neu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{F}(P)$ bzgl. Σ_e: $y_{alt} = F_{alt} \cdot x_{alt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $F_{alt} = F$

$y_{alt} = Ty_{neu}$, somit $y_{neu} = T^{-1}y_{alt} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, was mit dem Resultat von c) übereinstimmt.