Klasse ET04b **DMa3 Modul-Nachprüfung** 21. März 2006

Name:

Aufgabe 1

lineare Abbildung:

Gegeben sei $\mathcal{F}:\ \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto y = Ax \in \mathbb{R}^m$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis Σ_e.

a) $n =$?, $m =$? und $Rang(A) =$?

b) $dim(Kern(A)) =$? Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von A.

c) $dim(Bild(A)) =$? Bestimmen Sie eine ortho-normierte Basis für das Bild von A.

Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 3\dot{y} - 5y = 0 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = -1 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \frac{1}{2}$$

a) Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung $3-$ter Ordnung als lineares System $\dot{z} = Az$ von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Approximieren Sie die Lösung $z(t)$ mit der Methode von Euler, Schrittweite $h > 0$. Geben Sie dazu die dafür notwendige Rekursion an.

c) Führen Sie den ersten Schritt explizit durch und geben Sie $z(h)$ für $h = 0.5$ an.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < -\pi + a \\ 0, & -\pi + a \leq x < \pi - a \\ \pi, & \pi - a \leq x < \pi \end{cases} \qquad 0 < a < \frac{\pi}{4}$$

$2\pi-$ periodisch fortgesetzt ($f \notin C[-\pi, \pi]$).

a) Graphische Darstellung von $y = f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Grössen $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$ für $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

c) Bestimmen Sie die Grössen $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$ für $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\Phi(t) := e^{tA}$

b) Lösen Sie mit a) das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$ mit den AB $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) Wie müssen α und β gewählt werden, damit die Lösung $x(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$?

Aufgabe 5

a) Wir betrachten den Vektorraum der Polynome vom Grad 3. Sind die gegebenen Polynome linear unabhängig bzw. linear abhängig?

   a1) $\{1,\, 2x^2,\, x^2 + 2\}$

   a2) $\{4,\, 3x - 1,\, 2x^2 + 1,\, x^3 - 1\}$

b) Gegeben ist der Vektorraum der Polynome vom Grad 2 : $P_2 = span\,\{1,\, x,\, x^2\}$ auf dem Intervall $[-1,\, 1]$ mit $(p,\, q)_k :\ P_2 \times P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei

$(p,\, q)_1 := \int\limits_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx$

$(p,\, q)_2 := p(0) \cdot q(0) + \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx$

$(p,\, q)_3 := p(0) \cdot q(0) + p'(0) \cdot q'(0) + p''(x) \cdot q''(x)$

   b1) welches der definierten Produkte $(p,\, q)_k$ ist ein Skalarprodukt?

   b2) Geben Sie die Matrix der Werte $(x^i,\, x^j)_k,\ i, j = 0, 1, 2$ und $k = 1, 2, 3$ an, d.h. $(x, y)_k = x^T A_k y$

Aufgabe 6

Gegeben sind die drei Basen

$\Sigma_b :\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_c :\ c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\ c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e :\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Geben Sie die Transformation T_{eb} von Σ_e nach Σ_b, d.h. $\Sigma_e \longrightarrow \Sigma_b$ an.

b) Geben Sie die Transformation T_{ec} von Σ_e nach Σ_c, d.h. $\Sigma_e \longrightarrow \Sigma_c$ an.

c) Geben Sie die Transformation T_{bc} von Σ_b nach Σ_c, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_c$ an. (Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$ bzgl. Σ_e und $\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b$ bzgl. Σ_b.

   Gesucht sind diese Vektoren bzgl. der anderen Basen.

Lösungen der Modul-Nachprüfung in DMa3 (ET04b) 21.03.06

Lösung 1

a) $n = 5$, $m = 4$, $Rang(A) = r = 2$ mit Gauss-Algorithmus

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	0	0	0
.	1	3	1	1	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

b) $dim(Kern(A)) = 3 = n - r =$ Anzahl freie Parameter,nämlich: $x_5 = \mu_1$, $x_4 = \mu_2$ und $x_3 = \mu_3$, also $x = \mu_3 b_3 + \mu_2 b_2 + \mu_1 b_1$, wobei

$$b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Kern(A) = span\,\{b_1,\, b_2,\, b_3\}$

c) $dim(Bild(A)) = r = 2$ Pivot-Spalten spannen das Bild von A auf: $Bild(A) = span\left\{a^{(1)},\, a^{(2)}\right\}$, wobei

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt für diese beiden Spalten: $b_1 = \frac{1}{\|a^{(1)}\|} \cdot a^{(1)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$$c_2 = a^{(2)} - (a^{(2)},\, b_1)\, b_1 = a^{(2)} - \frac{10}{3}\, b_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

und somit $b_2 = \frac{1}{\|c_2\|} \cdot c_2 = \frac{1}{\sqrt{315}} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\sqrt{315} = 3\sqrt{35}$

Lösung 2

a) Sei $z_1 := y$, $z_2 := \dot{y}$ und $z_3 := \ddot{y}$: damit erhalten wir

$$\dot{z} = Az \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $z_{k+1} = z_k + h \cdot A z_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $z_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $z(h) = z_1 = z_0 + h \cdot A z_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ $h = 0.5 : z(0.5) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) graphische Darstellung

b) $a_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots$, da die gegebene Funktion ungerade ist.

c) $b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi-a}^{\pi} \pi \cdot \sin(kx)\, dx = \frac{2}{k}\ \{\cos(k\pi) - \cos(k(\pi - a))\} = \frac{4}{k}\ \cos(k\pi) \sin^2(k\frac{a}{2})$, schliesslich

$b_k = (-1)^k \frac{4}{k} \sin^2(k\frac{a}{2})$ für $k \in \mathbb{N}$

Lösung 4

a) EWP von A: $p_A(\lambda) = (-\lambda)(2 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$

zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, und damit

$e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\,e^{4t} + 4\,e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 8\,e^{4t} - 8\,e^{-2t} & 4\,e^{4t} + 2\,e^{-2t} \end{pmatrix}$

b) $x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) = \frac{1}{6} \left\{ e^{4t} \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ 8\alpha + 4\beta \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 4\alpha - \beta \\ -8\alpha + 2\beta \end{pmatrix} \right\}$

c) der Term e^{4t} darf in der Lösung nicht vorkommen: also

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 8\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad x(0) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösung 5

a) a1) Die drei gegebenen Polynome sind linear abhängig.
   a2) Die gegebenen Polynome sind linear unabhängig.

b) $(p,\, q)_1$ ist kein Skalarprodukt, da für $p \equiv 1$ ist $p'(x) = 0$ und somit $(p,\, p)_1 = 0$ obwohl $p \neq 0$

$(p,\, q)_2$ und $(p,\, q)_3$ sind Skalarprodukte: positiv definit und symmetrisch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bei A_1 ist positiv definit verletzt

Lösung 6

a)

$$T_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$T_{ec} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $T_{bc} : \ \Sigma_b \overset{T_{eb}^{-1}}{\longrightarrow} \Sigma_e \overset{T_{ec}}{\longrightarrow} \Sigma_c$, also

$$T_{bc} = T_{eb}^{-1}\, T_{ec} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{ec}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_b = T_{eb}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$ und

$\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e = T_{eb} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -12/3 \end{pmatrix}_c = T_{ec}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e$