Klasse ET04b **IMa1 - 1-te Klausur** 28. November 2005

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $a = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(2x))^{\frac{1}{x}}$ b) $b = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(\pi x^2)}{16-x^4}$

**Aufgabe 2**

$$y' = -4x^3 \cdot y^2 \qquad \text{mit der AB:} \quad y(0) = 3$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ des gegebenen Anfangswertproblems (AWP).

b) Wohin strebt die Lösung für $x \to \infty$ ?

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie das Integral

$$I = \int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{20}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\, dx \quad \text{mit Hilfe der Substitution: } x^2 - 4 = u$$

Resultat *exakt*.

**Aufgabe 4**

a) $I_1 = \int\limits_0^1 x \cdot a^x \, dx$ b) $I_2 = \int\limits_0^1 x \cdot a^x \, da, \quad x \neq -1$

**Aufgabe 5**

Gegeben ist die $2\pi-$ periodische Funktion $f(x) = \frac{x}{\pi}$ auf dem Intervall $[-\pi,\, \pi]$, graphische Darstellung.

a) Berechnen Sie die Grössen $a_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx,\ k = 0, 1, \ldots$

b) Berechnen Sie die Grössen $b_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx,\ k = 1, 2, \ldots$

**Aufgabe 6**

a) Gesucht sind die Extrema (Minima/Maxima) der Funktion

$$f(x) = \int\limits_0^x (\cos t - \sin t)\, dt,$$

*alle* möglichen Werte.

b) Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der $x-$ Achse begrenzt durch $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

**Lösungen der ersten IMa1 Klausur 28.11.05**

## Lösung 1

a) Grenzwert ist vom Typ „$1^{\infty}$“ also: $e^{\cdots}$ und den Exponenten betrachten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x))}{x} \overset{Bernoulli}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1+\sin(2x)} = 2$$

somit: $a = e^2$

b) Grenzwert ist vom Typ „$\frac{0}{0}$“, also

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x^2)}{16-x^4} \overset{Bernoulli}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(2\pi x)\cos(\pi x^2)}{-4x^3} = -\frac{\pi}{8}$$

## Lösung 2

a) Mit Separation:

$$\frac{dy}{y^2} = -4x^3dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{y} = -x^4 + C \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{1}{x^4+C}$$

mit $y(0) = 3$ erhalten wir $C = \frac{1}{3}$, somit $y(x) = \frac{1}{x^4+\frac{1}{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$

## Lösung 3

$du = 2xdx$ Grenzen: $x = \sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad u = 1$ und $x = \sqrt{20} \quad\Rightarrow\quad u = 16$

$$\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{20}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{16}\frac{u+4}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{16}\left(\sqrt{u}+\frac{4}{\sqrt{u}}\right)du = 33$$

## Lösung 4

a) mit partieller Integration:

$$I_1 = \frac{1}{\ln a}\,a - \frac{1}{(\ln a)^2}\,a + \frac{1}{(\ln a)^2} = \frac{1}{(\ln a)^2}\,(a\cdot\ln a - a + 1)$$

b) $x$ ist bei der Integartion über $a$ eine Konstante! $I_2 = \frac{x}{x+1}$, nur definiert, falls $x \neq -1$

## Lösung 5

mit partieller Integartion

a) $a_k = 0$ für $k = 0, 1, \ldots$, da $f(x)\cdot\cos(kx)$ eine ungerade Funktion ist und über ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall integriert wird.

b) $b_k = (-1)^{k-1}\,\frac{2}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

## Lösung 6

$f(x) = \sin x + \cos x - 1$

a) $f'(x) = \sin x - \cos x \overset{!}{=} 0$, also $\tan x = 1$, somit $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und schliesslich

$$f(x_k) = \begin{cases} \sqrt{2}-1 & \text{falls } k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \quad \text{lokale Maxima} \\ -\sqrt{2}-1 & \text{falls } k = \pm 1, \pm 3, \ldots \quad \text{lokale Minima} \end{cases}$$

b) $A = 2 - \frac{\pi}{2}$

# Numerische Resultate der DFT

Serie 8 delek

$x$ ist der Vektor der gegebenen Daten
$x_3$ Approximation mit drei Termen
$x_5$ Approximation mit fünf Termen
$x_7$ Approximation mit sieben Termen
$x_9$ Approximation mit neun Termen

## $2-$ Normen der absoluten Fehler:

2-norm von x-x3 = 30.580672 2-norm von x-x5 = 17.705555 2-norm von x-x7 = 11.837491 2-norm von x-x9 = 8.258104

$$\|x - x_3\|_2 = 30.580672 \tag{1}$$
$$\|x - x_5\|_2 = 17.705555 \tag{2}$$
$$\|x - x_7\|_2 = 11.837491 \tag{3}$$
$$\|x - x_9\|_2 = 8.258104 \tag{4}$$

## $1-$ Normen der absoluten Fehler:

1-norm von x-x3 = 86.306126 1-norm von x-x5 = 48.226599 1-norm von x-x7 = 32.009973 1-norm von x-x9 = 24.514845

$$\|x - x_3\|_1 = 86.306126 \tag{5}$$
$$\|x - x_5\|_1 = 48.226599 \tag{6}$$
$$\|x - x_7\|_1 = 32.009973 \tag{7}$$
$$\|x - x_9\|_1 = 24.514845 \tag{8}$$

## $\infty$ - Normen der absoluten Fehler:

$$\|x - x_3\|_\infty = 14.210570 \tag{9}$$
$$\|x - x_5\|_\infty = 10.972202 \tag{10}$$
$$\|x - x_7\|_\infty = 6.508166 \tag{11}$$
$$\|x - x_9\|_\infty = 3.488826 \tag{12}$$