Klasse ET04b **IMa1 zweite Klausur** 13. Januar 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{y} = 2t - y$.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die $y(0) = 1$ erfüllt.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung $(1 + x) \cdot y' = y - y^2$ für $x > -1$.
Bestimmen Sie diejenige Lösung, die durch den Punkt $P(0,\, \frac{1}{2})$ geht.

Aufgabe 3

a) $y'' + k^2 y = 0,\ k > 0$
Zeigen Sie, dass sowohl $y_1(x) = \cos(kx)$ und $y_2(x) = \sin(kx)$ als auch $y_3(x) = e^{jkx}$ und $y_4(x) = e^{-jkx}$ eine *Fundamentalbasis* der Lösungen bilden.

b) $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = \cos(2t)$
Wie gross muss δ sein, damit die Resonanzfrequenz $\omega_r = \frac{\omega_0}{4}$ ist?
Wie gross wird dabei die zugehörige Amplitude?

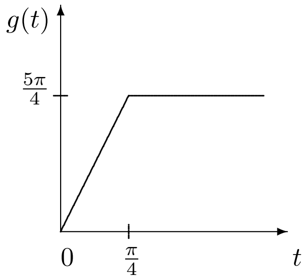
Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = 3y(5 - y)$

a) Zeigen Sie, dass
$$y(x) = \frac{5}{1 + C \cdot e^{-15x}}$$
für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist.

b) Wie muss $y(0) = y_0$ gegeben werden, damit $C = 1$ wird?

Aufgabe 5



$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = g(t)$, $g(t)$ gemäss Figur, mit den AB $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 1$

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

b) Was muss für $t = \frac{\pi}{4}$ verlangt werden, damit $y(t)$, $t \geq 0$ stetig differenzierbar (d.h. knickfrei) ist?

exakte Angaben

Aufgabe 6

Gegeben ist die Lösung $x(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t}\left(2\cos(\omega_\delta t) + \sin(\omega_\delta t)\right)$ einer Differentialgleichung.
Dabei ist $\omega_\delta = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}$.

a) Was ist hier eine Fundamentalbasis der Lösungen?

b) Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung?

c) Wie lauten die AB für $t = 0$?

d) Wie gross muss δ mindestens sein, damit die Auslenkung für $t \geq 100$ betragsmässig kleiner als 10^{-4} wird?

Lösungen der zweiten IMa1 Klausur 13.01.06

Lösung 1

a) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, $y_h(t)$ durch Separation und $y_p(t)$ anschliessend durch Variation der Konstanten
$y_h(t) = C \cdot e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$
Ansatz für $y_p(t)$: $y_p(t) = C(t) \cdot e^{-t}$,
$\dot{y}_p(t) = \dot{C}(t) \cdot e^{-t} - C(t) \cdot e^{-t}$ und einsetzen liefert:
$\dot{C}(t) = 2t \cdot e^t$ und damit $C(t) = e^t \cdot (2t-2)$, somit: $y_p(t) = 2t-2$ und schliesslich $y_a(t) = C \cdot e^{-t} + 2t - 2$

b) $y(0) = 1 = C - 2$ und damit $C = 3$, also $y(t) = 3 \cdot e^{-t} + 2t - 2$

Lösung 2

separierbare Dgl. $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{dx}{1+x}$. Für die Integration der linken Seite wird die PBZ gebraucht:
$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$. Damit erhalten wir:
$\left|\frac{y}{1-y}\right| = |1+x| \cdot e^C$ und schliesslich: $y_h(x) = \frac{C(1+x)}{1+C(1+x)}$, $C \in \mathbb{R}$

Lösung durch $P(0, \frac{1}{2})$: $y(0) = \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$, also $y(x) = \frac{1+x}{2+x}$

Lösung 3

a) Wronski-Determinanten:
$\begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \cdot \sin(kx) & k \cdot \cos(kx) \end{vmatrix} = k \neq 0$, bzw. $\begin{vmatrix} e^{(jkx)} & e^{(-jkx)} \\ (jk) \cdot e^{(jkx)} & (-jk) \cdot e^{(-jkx)} \end{vmatrix} = -2jk \neq 0$

b) $\omega_0 = 1$ und $\omega_E = 2$: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{1 - 2\delta^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{30}}{8}$ und
$A(\omega_r) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{16}{\sqrt{15}\sqrt{17}}$

Lösung 4

a) Nachrechnen: $y'(x) = \frac{-(-75C) \cdot e^{-15x}}{(1+C \cdot e^{-15x})^2}$ (Quotientenregel) und $(5-y) = \frac{5C \cdot e^{-15x}}{1+C \cdot e^{-15x}}$

b) $y_0 = y(0) = \frac{5}{1+C} = \frac{5}{2}$, da $C = 1$

Lösung 5

a) $g(t) = \begin{cases} 5t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$
$y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, $y_h(t)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $y_p(t)$ ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.
$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, $\lambda_{1.2} = -1 \pm 2j$, also $y_h(t) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
Ansatz für $y_p(t)$: $y_p(t) = a_0 + a_1 t$ Polynom ersten Grades, da die Anregung linear in t ist und $y(t)$ in der Dgl. vorkommt.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $y_p(t) = -\frac{2}{5} + t$
$y_a(t) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) - \frac{2}{5} + t$
AB: $y(t) = e^{-t}\left(\frac{2}{5} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(2t)\right) - \frac{2}{5} + t$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

b) $\dot{y}(t) = -e^{-t}\left(\frac{2}{5} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(2t)\right) + e^{-t}\left((-\frac{4}{5}) \cdot \sin(2t) + \frac{2}{5} \cdot \cos(2t)\right) + 1$
Stetigkeitsbedingungen:
$y(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{\pi}{4}$ und $\dot{y}(\frac{\pi}{4}) = -e^{-\frac{\pi}{4}} + 1$

Lösung 6

a) $x_1(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos(\omega_\delta)$ und $x_2(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \sin(\omega_\delta)$

b) $\ddot{x} + \delta\dot{x} + x = 0$

c) $x(0) = 2$ und $\dot{x}(0) = -\delta + \omega_\delta = -\delta + \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}$

d) $x(t) = A\sin(\omega_\delta t + \varphi)$, wobei $A = \sqrt{5}$ und $\varphi = \arctan(2)$
$|x(t)|_{max} = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cdot \sqrt{5}$, also $e^{-\frac{\delta}{2}100} \cdot \sqrt{5} \leq 10^{-4}$ und schliesslich $\delta \geq \frac{1}{50} \cdot \ln(\sqrt{5} \cdot 10^{-4})$

Numerische Resultate der DFT

Serie 8 delek

x ist der Vektor der gegebenen Daten
x_3 Approximation mit drei Termen
x_5 Approximation mit fünf Termen
x_7 Approximation mit sieben Termen
x_9 Approximation mit neun Termen

$2-$ Normen der absoluten Fehler:

2-norm von x-x3 = 30.580672 2-norm von x-x5 = 17.705555 2-norm von x-x7 = 11.837491 2-norm von x-x9 = 8.258104

$$\|x - x_3\|_2 = 30.580672 \tag{1}$$
$$\|x - x_5\|_2 = 17.705555 \tag{2}$$
$$\|x - x_7\|_2 = 11.837491 \tag{3}$$
$$\|x - x_9\|_2 = 8.258104 \tag{4}$$

$1-$ Normen der absoluten Fehler:

1-norm von x-x3 = 86.306126 1-norm von x-x5 = 48.226599 1-norm von x-x7 = 32.009973 1-norm von x-x9 = 24.514845

$$\|x - x_3\|_1 = 86.306126 \tag{5}$$
$$\|x - x_5\|_1 = 48.226599 \tag{6}$$
$$\|x - x_7\|_1 = 32.009973 \tag{7}$$
$$\|x - x_9\|_1 = 24.514845 \tag{8}$$

∞ - Normen der absoluten Fehler:

$$\|x - x_3\|_\infty = 14.210570 \tag{9}$$
$$\|x - x_5\|_\infty = 10.972202 \tag{10}$$
$$\|x - x_7\|_\infty = 6.508166 \tag{11}$$
$$\|x - x_9\|_\infty = 3.488826 \tag{12}$$