Klasse ET04b **IMa1 dritte Klausur** 10. Februar 2006

Name:

Aufgabe 1

a) $x^2 \cdot y'(x) + 4y(x) = 0.$
Auf was für Kurven liegen alle Punkte der $xy-$ Ebene mit einer konstanten Steigung $k \in \mathbb{R}$.
Betrachten Sie die Fälle $k > 0$ und $k < 0$.
Bestimmen Sie die Lösung der Dgl durch den Punkt $P(1,\, 2)$.

b) $y''(x) + y(x) = 0.$
Bestimmen sie diejenige Lösung, für die $y(0) = y(\pi) = 0$ erfüllt ist.
Feststellung?

Aufgabe 2

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ mit

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ und den AB: $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) allgemeine Lösung

b) spezielle Lösung mit den gegebenen AB.

Aufgabe 3

$\dddot{x} - \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$

a) Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung $3-$ ter Ordnung als System von Differentialgleichungen $1-$ ter Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des in a) bestimmten Systems.

c) Welche Funktionen bilden für diese Gleichung eine Fundamentalbasis?

Aufgabe 4

Gegeben ist das Dgl System $\dot{x} = Ax + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $g(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die allg. Lösung des gegebenen Problems.

b) Können die AB $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt werden,dass die Lösung für $t \to \infty$ nicht gegen Unendlich geht? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Gegeben ist $\dot{z} = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t + t \end{pmatrix}$, wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ und $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$

a) Wie muss A aussehen? Wie lautet die zugehörige Dgl $2-$ ter Ordnung?

b) Geben Sie diejenige Lösung an, für die $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dddot{x} + \ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 5\cos(2t)$

a) Schreiben Sie die gegebene Dgl dritter Ordnung als System von Dgl erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des in a) bestimmten Systems.

Lösungen der dritten IMa1 Klausur 10.02.06

Lösung 1

a) $y' = k$, also $y(x) = -\frac{k}{4} \cdot x^2$, $k > 0$: nach unten geöffnete Parabeln und für $k < 0$: nach oben geöffnete Parabeln, wobei der Scheitel in $(0,\, 0)$.
$y_h(x) = c \cdot e^{\frac{4}{x}}$, also $y(x) = \left(\frac{2}{e^4}\right) \cdot e^{\frac{4}{x}}$

b) $y_h(x) = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$: $y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$. Die zweite RB schränkt A nicht ein! Die Lösung wird *nicht* eindeutig: $y(x) = A \cdot \sin(x)$.

Lösung 2

a)

$$x_h(t) = 2e^{-t}(a\cos(t) - b\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2e^{-t}(b\cos(t) + a\sin(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, also $x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\,\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) Substitution: $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ und $y_3 = \ddot{x}$. Damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Entkopplung: EWP von A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0$
$\lambda_1 = 1$ mit dem Hornerschema, $\lambda_{2.3} = \pm\sqrt{2}$,
Eigenräume: $E_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $E_{\sqrt{2}} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}\}$, $E_{-\sqrt{2}} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}\}$

$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t} v^{(3)}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$

c) $x_k(t) = e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, 3$. Die zugehörige Wronski-Determinante ist
$|\ldots| = e^{Spur(A)\,t}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$, da die λ_k paarweise verschieden sind.

Lösung 4

a) $x_a(t) = x_h(t) + x_p(t)$
$\lambda_{1.2} = \pm 3$, $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $x_h(t) = c_1 e^{3\,t} v^{(1)} + c_2 e^{-3\,t} v^{(2)}$
Ansatz für $x_p(t)$: $x_p(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix}$, da die Anregung linear in t.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $x_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} t \\ -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} t \end{pmatrix}$

b) Nein, da die partikuläre Lösung $x_p(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, $c_1 = 0$ genügt nicht.

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 3e^t + t$

b) Entweder Lösung der Dgl zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} x_a(t) = x_h(t) + x_p(t) &= c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} - \frac{3}{2}\, e^t + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} \\ \dot{x}_a(t) = \dot{x}_h(t) + \dot{x}_p(t) &= -c_1\, e^{-t} + 2c_2\, e^{2t} - \frac{3}{2}\, e^t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

also

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0 & = & c_1 & + & c_2 & - & \frac{5}{4} \\ 1 & = & -c_1 & + & 2c_2 & - & 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} c_1 & = & -\frac{1}{6} \\ c_2 & = & \frac{17}{12} \end{array}\right.$$

und somit $x(t) = -\frac{1}{6}\,e^{-t} + \frac{17}{12}\,e^{2t} - \frac{3}{2}\,e^{t} + \frac{1}{4} - \frac{t}{2}$

oder Lösung des Systems von Dgl erster Ordnung: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den EV $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $z_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^{2t} v^{(2)}$,

eine partikuläre Lösung ist $z_p(t) = -\frac{3}{2}\,e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Mit den AB erhalten wir auch hier $c_1 = -\frac{1}{6}$ und $c_2 = \frac{17}{12}$.

Lösung 6

a) Substitution: $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ und $y_3 = \ddot{x}$.

Damit erhalten wir $\dot{y} = Ay + g(t)$ wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ und $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\cos(2t) \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $p_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 3 \overset{!}{=} 0$
Horner-Schema: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_{2.3} = \pm j\sqrt{3}$

Ansatz für $y_p(t) = \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) & + & c_2\sin(2t) \\ -2c_1\sin(2t) & + & 2c_2\cos(2t) \\ -4c_1\cos(2t) & - & 4c_2\sin(2t) \end{pmatrix}$, da $j2$ kein EW von A

Einsetzen und Koeffizientenvergleich (dritte Komponente):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \sin(2t): & 8c_1 & = & -3c_2 & + & 6c_1 & + & 4c_2 & & \\ \cos(2t): & -8c_2 & = & -3c_1 & - & 6c_2 & + & 4c_1 & + & 5 \end{array}$$

woraus wir $c_1 = -1$ und $c_2 = -2$ und schliesslich $y_p(t) = \begin{pmatrix} -\cos(2t) & - & 2\sin(2t) \\ 2\sin(2t) & - & 4\cos(2t) \\ 4\cos(2t) & + & 8\sin(2t) \end{pmatrix}$ erhalten.