

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a)  $I_a = \int \frac{1}{2+3 \cdot e^x} dx$  mit Substitution, anschliessend Partialbruchzerlegung.

b)  $I_b = \int \cos(\sqrt{x}) dx$  mit Substitution, anschliessend partielle Integration.

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die verlangten Integrale definiert?**Aufgabe 2**a) Bestimmen Sie die Lösung  $f_\varepsilon$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  der Differentialgleichung

$$\varepsilon \cdot \dot{f} + f = 2t + 1 \quad \text{mit} \quad f(0) = -2\varepsilon$$

Dabei ist  $\varepsilon > 0$ .b) Was erhalten Sie, falls  $\varepsilon \rightarrow 0$  geht?**Aufgabe 3**

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1 - \dot{y}_2 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - \dot{y}_3 - y_3 = 0 \\ \dot{y}_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{mit den AB} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

**Aufgabe 4**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) - \tan(x) \cdot y(x) = 2 \sin(x) \quad \text{mit der AB:} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

**Aufgabe 5**Lösen Sie folgende Differentialgleichung für die Funktion  $y(x)$ 

$$y' = \frac{1}{x+y} + (x+y) - 1 \quad \text{mit der AB} \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Substitution  $u := x + y$ .**Aufgabe 6**a) Wie gross muss die Kreisfrequenz  $\omega_E$  der Anregung  $g(t) = \sqrt{5} \cos(\omega_E t + \frac{\pi}{4})$  in der folgenden Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \frac{1}{2} \dot{y} + \frac{3}{2} y = g(t)$$

gewählt werden, damit die Amplitude der partikulären Lösung  $y_p(t) = A(\omega_E) \cos(\omega_E t + \varphi)$  maximal wird?b) Wie gross ist diese maximale Amplitude  $A_{max}$  ?c) Stellen Sie die Amplitude  $A(\omega_E)$  von  $y_p(t)$  auf dem Bereich  $0 \leq \omega_E \leq 4$  graphisch dar.

**Lösung 1**

a)  $I_a$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.  $u := e^x > 0$  und damit

$$I_a = \int \frac{1}{2+3 \cdot u} \frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{3}{2+3 \cdot u} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$\text{also } I_a = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(2 + 3 \cdot u) + \frac{1}{2} \ln(u) + C$$

$$\text{und nach Rücksubstitution: } I_a = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(2 + 3 \cdot e^x) + \frac{x}{2} + C$$

b)  $I_b$  nur definiert falls  $x \geq 0$ ,  $u := \sqrt{x}$  und damit

$$I_b = 2 \int \cos(u) \cdot u du = 2 \cdot u \sin(u) + 2 \cos(u) + C$$

$$\text{und nach Rücksubstitution: } I_b = 2 \cdot \sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C$$

**Lösung 2**

a)  $f_\varepsilon(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (1 - 2\varepsilon + 2t)$  mit der AB:  $C = -1$ , also  $f_\varepsilon(t) = -e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (1 - 2\varepsilon + 2t)$

b)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) = 1 + 2t$

**Lösung 3**

Das System umformen:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = & - & y_2 & + & 2y_3 \\ \dot{y}_2 = & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ \dot{y}_3 = & y_1 & + & y_2 & - & y_3 \end{cases} \quad \text{also} \quad \dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Entkopplung, EWP von  $A$ :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \text{ da die Koeffizienten zu Null addieren,}$$

$$\text{also } p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2): \lambda_2 = -1 \text{ und } \lambda_3 = -2$$

$$\text{EV: } v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{somit } y_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit den AB werden die  $c_k$  bestimmt (Gauss-Algorithmus):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = 1, c_2 = -\frac{1}{2} \text{ und } c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{und schliesslich: } y(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung 4**

separierbare Dgl., Variation der Konstanten

a) homogenes Problem:  $y'(x) - \tan(x) \cdot y(x) = 0$

$$\frac{dy}{y} = \tan(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \tan(x) dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos(x)| + \ln|C| = \ln \frac{|C|}{|\cos(x)|}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = \frac{C}{\cos(x)} \quad C \in \mathbb{R}$$

b) inhomogenes Problem: Ansatz  $y_p(x) = C(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$ , ableiten und einsetzen

$$y_p'(x) - \tan(x) \cdot y_p(x) \stackrel{!}{=} 2 \sin(x) \Rightarrow C'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x) \text{ und damit}$$

$$C(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x), \text{ also } y_p(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$$

mit a) und b):  $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{\cos(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

AB:  $y(0) = \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} C - \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$  und schliesslich:  $y(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

### Lösung 5

$u' = 1 + y'$  und daraus erhalten wir:  $u' = \frac{1}{u} + u$ , eine separierbare Dgl.

$$\frac{u}{u^2 + 1} du = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = x + C$$

und somit die allgemeine Lösung  $u_h(x) = \pm \sqrt{C \cdot e^{2x} - 1}$ ,  $C > 0$ .

Rücksubstitution:  $y_h(x) = \pm \sqrt{C \cdot e^{2x} - 1} - x$ .

Mit der AB folgt, dass nur das + in Frage kommt:  $y(0) = 1 \stackrel{!}{=} \sqrt{C - 1} \Rightarrow C = 2$ ,  
schliesslich:  $y(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2x} - 1} - x$ .

### Lösung 6

a)  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{3}{2}$ ,  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$   
 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 1$

b)  $A_{max} = A(\omega_r) = 2$

c)  $A(\omega_E) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}}$   
 $A(0) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1.15$  und  $A(4) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{905}} \approx 0.15$

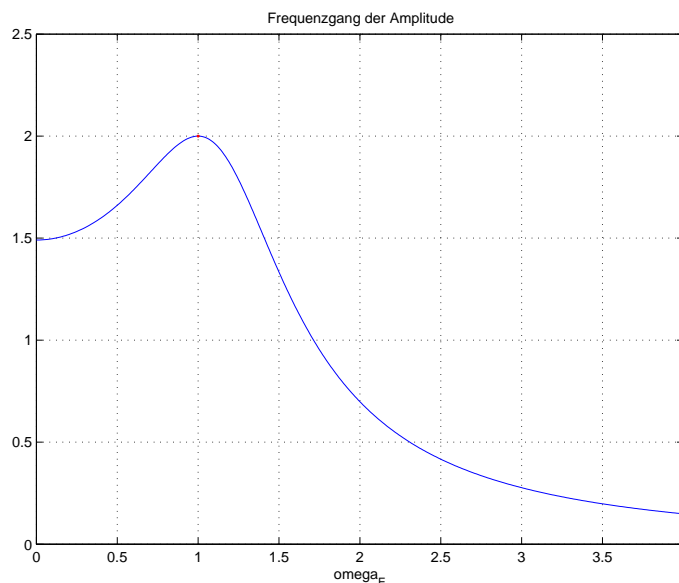


Abbildung 1: Amplitude in Abhängigkeit von  $\omega_E$