Klasse ET04b **IMa1 Nachprüfung der Modul-Nachprüfung** 08. April 2006

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Aufgabe 1**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y} = 2\sin(t) + \tan(t) \cdot y \qquad \text{mit der AB:} \quad y(0) = 1$$

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung für die Funktion $y(x)$

$$y' = (y - x)(y - x + 1) + 1$$

mit Hilfe der Substitution $u := y - x$.

**Aufgabe 3**

a) Bestimmen Sie die Lösung $f_\varepsilon$ in Abhängigkeit von $\varepsilon$ der Differentialgleichung

$$\varepsilon \cdot \dot{f} + 2f = t^2 + 1 \qquad \text{mit} \qquad f(0) = -2\varepsilon$$

Dabei ist $\varepsilon > 0$.

b) Was erhalten Sie, falls $\varepsilon \to 0$ geht?

**Aufgabe 4**

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & \dot{y} & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & \dot{z} & - & z & = & 0 \\ \dot{x} & & & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{mit} \qquad x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1$$

**Aufgabe 5**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $I_a = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ mit Substitution.

b) $I_b = \int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+1}\, dx$ mit Substitution, anschliessend partielle Integration.

**Aufgabe 6**

a) Wie gross muss die Kreisfrequenz $\omega_E$ der Anregung $f(t) = \sqrt{5}\cos(\omega_E t + \frac{\pi}{4})$ in der folgenden Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{3}{2}x = f(t)$$

gewählt werden, damit die Amplitude der partikulären Lösung $x_p(t) = A(\omega_E)\cos(\omega_E t + \varphi)$ maximal wird?

b) Wie gross ist diese maximale Amplitude $A_{max}$ ?

c) Stellen Sie die Amplitude $A(\omega_E)$ von $x_p(t)$ auf dem Bereich $0 \le \omega_E \le 4$ graphisch dar.

**Lösungen der Modul-Nachprüfung in IMa1 (ET04b) 21.03.06**

## Lösung 1

a) $I_a$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. $u := e^x > 0$ und damit
$I_a = \int \frac{1}{2+3\cdot u} \frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{3}{2+3\cdot u}\, du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du$
also $I_a = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(2+3\cdot u) + \frac{1}{2} \ln(u) + C$
und nach Rücksubstitution: $I_a = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(2+3\cdot e^x) + \frac{x}{2} + C$

b) $I_b$ nur definiert falls $x \geq 0$, $u := \sqrt{x}$ und damit
$I_b = 2 \int \cos(u) \cdot u\, du = 2 \cdot u \sin(u) + 2\cos(u) + C$
und nach Rücksubstitution: $I_b = 2 \cdot \sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$

## Lösung 2

a) $f_\varepsilon(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (1 - 2\varepsilon + 2t)$ mit der AB: $C = -1$, also $f_\varepsilon(t) = -e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (1 - 2\varepsilon + 2t)$

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = 1 + 2t$

## Lösung 3

Das System umformen:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \dot{y}_1 & = & & - & y_2 & + & 2y_3 \\ \dot{y}_2 & = & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ \dot{y}_3 & = & y_1 & + & y_2 & - & y_3 \end{array} \right. \qquad \text{also} \qquad \dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Entkopplung, EWP von $A$:
$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, da die Koeffizienten zu Null addieren,
also $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$: $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$

$$\text{EV:} \qquad v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

somit $y_h(t) = c_1\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit den AB werden die $c_k$ bestimmt (Gauss-Algorithmus):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = 1,\ c_2 = -\tfrac{1}{2} \text{ und } c_1 = \tfrac{1}{2}$$

und schliesslich: $y(t) = \frac{1}{2}\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\, e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Lösung 4

separierbare Dgl., Variation der Konstanten

a) homogenes Problem: $y'(x) - \tan(x) \cdot y(x) = 0$

$$\frac{dy}{y} = \tan(x)\, dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \tan(x)\, dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos(x)| + \ln|C| = \ln \frac{|C|}{|\cos(x)|}$$

$\Rightarrow y_h(x) = \frac{C}{\cos(x)} \quad C \in \mathbb{R}$

b) inhomogenes Problem: Ansatz $y_p(x) = C(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$, ableiten und einsetzen

$y_p'(x) - \tan(x) \cdot y_p(x) \stackrel{!}{=} 2\sin(x) \Rightarrow C'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ und damit $C(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$, also $y_p(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

mit a) und b): $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{\cos(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

AB: $y(0) = \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} C - \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$ und schliesslich: $y(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

**Lösung 5**

$u' = 1 + y'$ und daraus erhalten wir: $u' = \frac{1}{u} + u$, eine separierbare Dgl.

$$\frac{u}{u^2+1}\,du = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = x + C$$

und somit die allgemeine Lösung $u_h(x) = \pm\sqrt{C \cdot e^{2x} - 1}$, $C > 0$.
Rücksubstitution: $y_h(x) = \pm\sqrt{C \cdot e^{2x} - 1} - x$.
Mit der AB folgt, dass nur das $+$ in Frage kommt: $y(0) = 1 \stackrel{!}{=} \sqrt{C-1} \Rightarrow C = 2$,
schliesslich: $y(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2x} - 1} - x$.

**Lösung 6**

a) $\delta = \frac{1}{2}$, $\omega_0^2 = \frac{3}{2}$, $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$
$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 1$

b) $A_{max} = A(\omega_r) = 2$

c) $A(\omega_E) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}$
$A(0) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1.15$ und $A(4) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{905}} \approx 0.15$

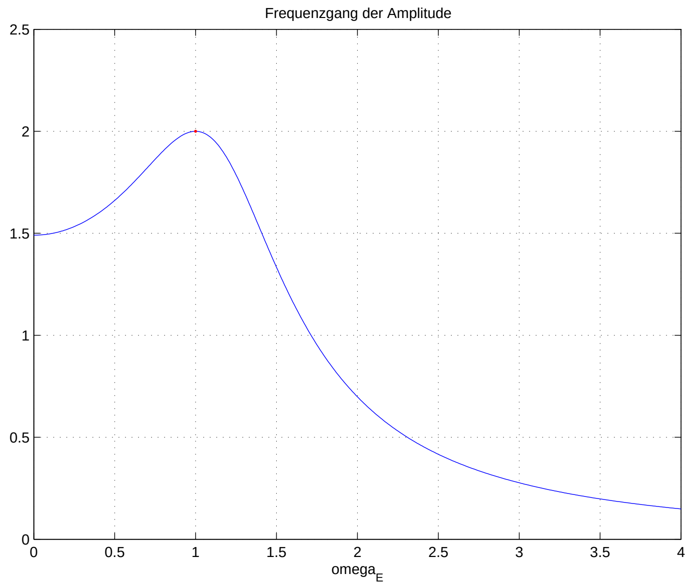


Abbildung 1: Amplitude in Abhängigkeit von $\omega_E$