Klasse MB04a **DMa3 Klausur** 22. Februar 2006

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Aufgabe 1**

a) Entwickeln Sie $g(x) = \frac{3}{2+5x}$ in eine Potenzreihe. Bestimmen Sie zudem den Konvergenzradius $\rho$ und das Entwicklungszentrum $x_0$.

b) Gegeben ist die Potenzreihe $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^j \, x^{j+1}$.

Gesucht sind der Konvergenzbereich und die zugehörige Funktion.

**Aufgabe 2**

a) Entwickeln Sie das Polynom $p_5(x) = -5 + 2x - 7x^2 + 6x^3 - x^5$ an der Stelle $x_0 = -1$ mit einem Taylorpolynom.

b) Wie gross ist die zweite Ableitung von $p_5(x)$ an der Stelle $x = -1$ ?

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie $x$ aus der Gleichung $\cos(x) = \frac{1}{2}\, x^2$, indem Sie für $\cos(x)$ das Taylorpolynom

a) $2-$ ten Grades

b) $4-$ ten Grades

verwenden.

**Aufgabe 4**

Mit einem Taylorpolynom $n-$ ten Grades von $\ln(1+x)$ soll $\ln(2)$ berechnet werden.
Wie gross muss $n$ mindestens gewählt werden, damit das Resultat zweistellig korrekt gerundet ist?

**Aufgabe 5**

Enwickeln Sie die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$ in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungszentrum $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Summanden.

b) Wie lautet die Entwicklung aus a) in der Schreibweise mit $\Sigma$ ?

**Aufgabe 6**

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und Konvergenzbereich der Potenzreihe:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (x-2)^k}{\sqrt{(5k-2)3^k}}$$

b) Untersuchen Sie die Konvergenz von $p(x)$ in den Randpunkten des Konvergenzbereichs.

**Lösungen der DMa3 Klausur 22.02.06**

## Lösung 1

a)

$$g(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{5}{2}\,x}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5}{2}\,x\right)^k \qquad x_0 = 0 \quad \text{geometrische Reihe mit } q = \left(-\frac{5}{2}\,x\right)$$

Konvergenz, falls $|q| < 1$, also $\rho = \frac{2}{5}$ oder mit Quotientenkriterium: $a_k = (-1)^k\,\left(\frac{5}{2}\right)^k$

b)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^j x^{j+1} = x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\,x\right)^j = x\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{7}\,x} \qquad x_0 = 0$$

geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{7}\,x \Rightarrow \rho = \frac{7}{2}$. Die zugehörige Funktion ist $f(x) = \frac{7x}{7-2x}$.
Konvergenzbereich von $p(x)$: $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, also $-\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2}$.

## Lösung 2

vollständiges Hornerschema mit $x_0 = -1$

a)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $0$ | $6$ | $-7$ | $2$ | $-5$ | | |
| $x_0 = -1$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $-5$ | $12$ | $-14$ | | |
| | $-1$ | $1$ | $5$ | $-12$ | $14$ | $-19$ | $=$ | $p_5(-1)$ |
| $x_0 = -1$ | $0$ | $1$ | $-2$ | $-3$ | $15$ | | | |
| | $-1$ | $2$ | $3$ | $-15$ | $29$ | | $=$ | $\frac{1}{1!}\,p_5'(-1)$ |
| $x_0 = -1$ | $0$ | $1$ | $-3$ | $0$ | | | | |
| | $-1$ | $3$ | $0$ | $-15$ | | | $=$ | $\frac{1}{2!}\,p_5^{(2)}(-1)$ |
| $x_0 = -1$ | $0$ | $1$ | $-4$ | | | | | |
| | $-1$ | $4$ | $-4$ | | | | $=$ | $\frac{1}{3!}\,p_5^{(3)}(-1)$ |
| $x_0 = -1$ | $0$ | $1$ | | | | | | |
| | $-1$ | $5$ | | | | | $=$ | $\frac{1}{4!}\,p_5^{(4)}(-1)$ |
| $x_0 = -1$ | $0$ | | | | | | | |
| | $-1$ | | | | | | $=$ | $\frac{1}{5!}\,p_5^{(5)}(-1)$ |

somit erhalten wir die Entwicklung:

$$p_5(x) = -19 + 29(x+1) - 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + 5(x+1)^4 - (x+1)^5$$

b) $p_5''(-1) = -30$

## Lösung 3

a) $1 - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\,x^2 \Rightarrow x_{1.2} = \pm 1$

b) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{2}\,x^2 \Rightarrow x_{1.2} = \pm\sqrt{12 - 2\sqrt{30}} \approx \pm 1.0225\ldots$

**Lösung 4**

$\ln(1+x) = T_n(x) + R_n(x)$, wobei $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} \pm \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ gültig für $|x| < 1$
und $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ mit $0 \leq \vartheta < 1$, also $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$
Genauigkeitsanforderung: $\frac{1}{n+1} < 5 \cdot 10^{-3}$ und somit $n \geq \frac{1}{5} \cdot 10^3 - 1 = 199$.

**Lösung 5**

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \cos(x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) - x \cdot \sin(x) & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\
f^{(2)}(x) &= -2\sin(x) - x \cdot \cos(x) & f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \\
f^{(3)}(x) &= -3\cos(x) + x \cdot \sin(x) & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
f^{(4)}(x) &= 4\sin(x) + x \cdot \cos(x) & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 4 \\
f^{(5)}(x) &= 5\cos(x) - x \cdot \sin(x) & f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\
f^{(6)}(x) &= -6\sin(x) - x \cdot \cos(x) & f^{(6)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -6
\end{aligned}$$

a) $f(x) = -\frac{\pi/2}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{\pi/2}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{4}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{\pi/2}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 - + \ldots$

b)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}}{(2k-1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} + \frac{2k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \right\}$$

**Lösung 6**

a) $a_k = \frac{4^k}{\sqrt{(5k-2)3^k}}$, somit $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ mit dem
Konvergenzbereich $2 - \frac{\sqrt{3}}{4} < x < 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$, da $x_0 = 2$.

b) linker Rand: $p(2 - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ mit $b_k = \frac{1}{\sqrt{(5k-2)}}$.
Diese Reihe ist konvergent, Kriterium von Leibniz.

rechter Rand: $p(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, auch hier $b_k = \frac{1}{\sqrt{(5k-2)}}$, wie am linken Rand.
Quotienten - und Wurzelkriterium erlauben keine Aussage!