Klasse MB04a **DMa3 Modul-Nachprüfung** 21. März 2006

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differntialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) = 0 \qquad \text{mit den AB} \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der Dgl. mit einem Potenzreihen - Ansatz.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe aus a).

Aufgabe 2

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Geben Sie zudem die entsprechenden Konvergenzradien an.

Aufgabe 3

Enwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{-1}}$ in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungszentrum $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Summanden.

b) Wie lautet die Entwicklung aus a) in der Schreibweise mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ldots$?

Aufgabe 4

a) Ersetzen Sie die Sinusfunktion in der Umgebung ihres ersten Maximums durch eine Parabel.

b) Lösen Sie die Gleichung $\cosh(x) = 4 - x^2$ näherungsweise durch Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ und Abbruch dieser Reihe nach der vierten Potenz.

Aufgabe 5

a) Entwickeln Sie $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ in eine Taylorreihe mit $t_0 = 0$. Geben Sie den Konvergenzradius ρ an.

b) Mit der Entwicklung aus a) soll das Integral $I = \int\limits_0^{0.1} f(t)\,dt$ berechnet werden. Wie viele Summanden müssen Sie mindestens berücksichtigen, damit Sie ein Resultat mit 7 korrekten Dezimalen erhalten?

Aufgabe 6

Gegeben ist das Polynom $p_{10}(x) = x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^2 + 2x + 1$

a) Entwickeln Sie das Polynom $p_{10}(x)$ an der Stelle an der Stelle $x_0 = -1$.

b) Die Entwicklung aus a) wird auf dem Intervall $[-1-a, \, -1+a]$ mit $a > 0$ verwendet.
Wie gross wird der Fehler maximal, falls bei der Entwicklung in a) bereits beim $7-$ ten Summanden abgeschnitten wird?

Lösungen der Modul-Nachprüfung in DMa3 (MB04a) 21.03.06

Lösung 1

Ansatz: $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, einsetzen und anschliessender Koeffizientenvergleich

$y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{(k-1)}$ und $y''(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k x^{(k-2)}$

a) $2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3\, x + 4 \cdot 3\, a_4\, x^2 + \ldots + 2\left(1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2\, x + 3 \cdot a_3\, x^2 + \ldots\right) = 0$

AB: $y(0) = 0 \stackrel{!}{=} a_0$ und $y1(0) = 1 \stackrel{!}{=} a_1$

Koeffiziententenvergleich:

$$\begin{array}{rlcccccc} x^0: & 2 \cdot 1\, a_2 + 2 \cdot 1\, a_1 & = & 0 & \Rightarrow & a_2 & = & -a_1 \\ x^1: & 3 \cdot 2\, a_3 + 2 \cdot 2\, a_2 & = & 0 & \Rightarrow & a_3 & = & -\frac{2}{3}\, a_2 \\ x^2: & 4 \cdot 3\, a_4 + 2 \cdot 3\, a_3 & = & 0 & \Rightarrow & a_4 & = & -\frac{2}{4}\, a_3 \\ x^3: & 5 \cdot 4\, a_5 + 2 \cdot 4\, a_4 & = & 0 & \Rightarrow & a_5 & = & -\frac{2}{5}\, a_4 \\ \ldots & & \ldots & & & & & \end{array}$$

allgemeine Rekursion: $a_{k+1} = \left(-\frac{2}{k+1}\right)\, a_k$ für $k = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = 0 \; a_1 = 1 \; a_2 = -1 \; a_3 = \frac{2}{3} \; a_4 = -\frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3} \; a_5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} \quad \ldots \quad a_n = (-1)^{n-1}\, \frac{2^{n-1}}{n!}$$

analytisch (als Verifikation):
exakte Lösung: $y(x) = (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}$, Koeffizienten: $b_0 = 0$ und $b_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{k-1}}{k!}$

b) $x_0 = 0$ und Konvergenzradius: $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{2} = \infty$, d.h. die Potenzreihe ist für *alle* $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Lösung 2

a) PBZ von $f(x)$: $f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$
Summe zweier geometrischer Reihen:

$$\frac{\frac{2}{3}}{x+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^k}{2^k} \qquad q = -\frac{x}{2} \qquad -2 < x < 2 \qquad \rho_1 = 2$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-x} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad q = x \qquad -1 < x < 1 \qquad \rho_2 = 1$$

also

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 2^k}{2^k}\right) x^k \qquad \rho = \min(\rho_1, \rho_2) = 1 \qquad x_0 = 0$$

b) $g(x)$ ist die Ableitung von $\frac{1}{1-x}$ oder $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$, mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir also

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$$

mit $\rho = 1$

Lösung 3

$f(x) = x \cdot \sin(x)!$

a) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!}\,(x-\frac{\pi}{2}) - \frac{\frac{\pi}{2}}{2!}\,(x-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{3}{3!}\,(x-\frac{\pi}{2})^3 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4!}\,(x-\frac{\pi}{2})^4 + \frac{5}{5!}\,(x-\frac{\pi}{2})^5 - + \dots$

b) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}}{(2k)!}\,(x-\frac{\pi}{2})^{2k} + \frac{2k+1}{(2k+1)!}\,(x-\frac{\pi}{2})^{2k+1} \right\}$

Lösung 4

a) Taylorpolynom vom Grad 2 mit $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - + \dots$$

also $\sin(x) \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{\pi}{2}\,x + 1 - \frac{\pi^2}{8}$

b) mit Hilfe der Taylorreihe von $\cosh(x)$ erhalten wir

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 4 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^4 + 36x^2 - 72 = 0$$

mit den Lösungen $x_{1.2} = \pm\sqrt{-18 + 2\sqrt{99}} = \pm 1.378\dots$

Lösung 5

a) $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot t^{2j}$, geometrische Reihe mit $q = t^2$ und damit $\rho = 1$.

b) $I = \left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{0.1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{0.1^{2k+1}}{2k+1}$

Abschätzung des Fehlers: $\left|\frac{0.1^{2n+1}}{(2n+1)}\right| \leq 5 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \frac{1}{2n+1}\,10^{-2n} \leq 5 \cdot 10^{-7}$: $\Rightarrow n = 4$

Lösung 6

vollständiges Hornerschema

a)

$$\begin{aligned} p_{10}(x) \;\; = \;\; & 2\,(x+1)^2 - 8\,(x+1)^3 + 28\,(x+1)^4 - 56\,(x+1)^5 + 70\,(x+1)^6 - 56\,(x+1)^7 \\ & + 28\,(x+1)^8 - 8\,(x+1)^9 + (x+1)^{10} \end{aligned}$$

b) Lagranges'sches Restglied:

$$R_9(x) = \frac{p_{10}^{(9)}(\xi)}{9!}\,(x - x_0)^9 \qquad -1 - a \leq \xi \leq -1 + a \qquad x_0 = -1$$

$p_{10}^{(9)}(x) = -10! \cdot x + 2 \cdot 9!$ ist linear in x mit negativer Steigung, d.h. $\left|p_{10}^{(9)}(x)\right|$ ist am linken Rand maximal: $\left|p_{10}^{(9)}(x)\right| \leq \left|p_{10}^{(9)}(-1-a)\right| = (8 + 10a) \cdot 9!$ und schliesslich

$|R_9(x)| \leq (8 + 10a) \cdot a^9$ für $\xi = -1 - a$ und $x = -1 - a$.

Lösung 7

vollständiges Hornerschema mit $x_0 = 2$
neu rechnen!!

a)

$$
\begin{array}{r|rrrrrrcl}
 & -1 & 0 & 6 & -7 & 2 & -5 & & \\
x_0 = -1 & 0 & 1 & -1 & -5 & 12 & -14 & & \\
\hline
 & -1 & 1 & 5 & -12 & 14 & -19 & = & p_5(-1) \\
x_0 = -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 15 & & & \\
\hline
 & -1 & 2 & 3 & -15 & 29 & & = & \frac{1}{1!}\, p_5'(-1) \\
x_0 = -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & & & & \\
\hline
 & -1 & 3 & 0 & -15 & & & = & \frac{1}{2!}\, p_5^{(2)}(-1) \\
x_0 = -1 & 0 & 1 & -4 & & & & & \\
\hline
 & -1 & 4 & -4 & & & & = & \frac{1}{3!}\, p_5^{(3)}(-1) \\
x_0 = -1 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 5 & & & & & = & \frac{1}{4!}\, p_5^{(4)}(-1) \\
x_0 = -1 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & & & & & & = & \frac{1}{5!}\, p_5^{(5)}(-1)
\end{array}
$$

somit erhalten wir die Entwicklung:

$$p_5(x) = -19 + 29(x+1) - 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + 5(x+1)^4 - (x+1)^5$$

b) $p_5''(-1) = -30$

Lösung 8

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \cos(x) & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) - x \cdot \sin(x) & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\
f^{(2)}(x) &= -2\sin(x) - x \cdot \cos(x) & f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \\
f^{(3)}(x) &= -3\cos(x) + x \cdot \sin(x) & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
f^{(4)}(x) &= 4\sin(x) + x \cdot \cos(x) & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 4 \\
f^{(5)}(x) &= 5\cos(x) - x \cdot \sin(x) & f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\
f^{(6)}(x) &= -6\sin(x) - x \cdot \cos(x) & f^{(6)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -6
\end{aligned}
$$

a) $f(x) = -\frac{\pi/2}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{\pi/2}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{4}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{\pi/2}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 - + \ldots$

b)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}}{(2k-1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} + \frac{2k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \right\}$$