Klasse: ET05a **DMa2** **Klausur 1** 12. Mai 2006

Name:

Erster Teil (ohne Taschenrechner)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) \neq 0$?
Hinweis: Überlegen Sie zuerst, nach welcher Spalte Sie am besten entwickeln.

Aufgabe 2. Berechnen Sie entweder mithilfe des Gauss-Algorithmus oder mithilfe der Cramer'schen Regeln die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit A^{-1} überhaupt existiert?
Zur Erinnerung: Zu einer gegebenen $(n \times n)$-Matrix A ist deren Inverse A^{-1} – sofern sie überhaupt existiert – dadurch definiert, dass sie die Gleichung

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

erfüllt.

Aufgabe 3. Gegeben ist die Matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -2 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 & \alpha & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit dem Parameter α. Ferner kennt man die Werte

$$\det(A(2)) = 36, \qquad \det(A(1)) = 19, \qquad \det(A(0)) = 16.$$

Bestimmen Sie die Determinante $\det(A(\alpha))$ als Funktion von α.
Hinweis: Überlegen Sie zuerst, wie die Determinante von α abhängt.

Aufgabe 4. Eine Vorschrift m, die jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl $m(x)$ zuordnet, heisst eine *Norm von* $\mathbb{R}^n$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(N1) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $m(x) \geq 0$, und aus $m(x) = 0$ folgt $x = 0$.

(N2) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ und für jede reelle Zahl μ gilt $m(\mu \cdot x) = |\mu| \cdot m(x)$.

(N3) Für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $m(x + y) \leq m(x) + m(y)$.

Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Vorschrift um eine Norm von $\mathbb{R}^3$ handelt:

$$m(x) = |x_1| + |x_2| + x_3^2 \quad (\text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3).$$

Bitte wenden!

Zweiter Teil (mit Taschenrechner)

Hinweise:

- Runden Sie bei den nachfolgenden Aufgaben alle numerischen Resultate korrekt auf drei signifikante Stellen. Benutzen Sie zum Weiterrechnen jedoch immer die volle Stellenzahl ihres Taschenrechners.
- Blosse Resultate, ohne Angabe eines Lösungsweges werden nicht bewertet.

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-1}$$

an der Stelle $x = 1000$.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, durch algebraisches Umformulieren des Problems die Auslöschung bei der Berechnung von $H(x)$.

Aufgabe 6. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1.04 & 1.52 & 6.27 \\ 3.96 & 1.87 & 4.23 \\ 2.73 & -0.49 & -4.88 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2.21 \\ 4.09 \\ 1.17 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie unter bestmöglicher Vermeidung von Auslöschung die LR-Zerlegung von A. Gefragt sind alle drei Matrizen L, R und P.

b) Lösen Sie $Ax = b$ mithilfe der Zerlegung aus a).

Aufgabe 7. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_\infty$-Norm.

b) Betrachten Sie nun für $\varepsilon = 10^{-5}$ die beiden rechten Seiten

$$\widehat{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \widehat{b}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\widehat{x}_1$ und $\widehat{x}_2$, sowie deren relativen Fehler $\|\delta\widehat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\widehat{x}_2\|_\infty$.

c) Vergleichen Sie die in b) gefundenen relativen Fehler $\|\delta\widehat{x}_1\|_\infty$, $\|\delta\widehat{x}_2\|_\infty$ mit den theoretisch hergeleiteten Abschätzungen. Was stellen Sie dabei fest?

Aufgabe 8. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Für welche Winkel φ gilt $AB = BA$? Gefragt sind *alle* Lösungen.

DMa2 Lösungen zur ersten Klausur

Aufgabe 1.

$$\det(A) = (c-d)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (c-d)(c-b)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (c-d)(c-b)(1-b).$$

Also ist $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $b \neq 1$ und $c \neq b$ und $c \neq d$.

Aufgabe 2.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix A^{-1} existiert genau dann, wenn $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 3. Aus der Entwicklungsformel der Determinante schliesst man, dass

$$\det(A(\alpha)) = u\alpha^2 + v\alpha + w.$$

Einsetzen der bekannten Werte ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{lllll} \det(A(2)) & = & 36 & = & 4u+2v+w \\ \det(A(1)) & = & 19 & = & u+v+w \\ \det(A(0)) & = & 16 & = & w \end{array}\right.$$

Aus der letzten Gleichung folgt: $w = 16$.
Einsetzen in die verbleibenden zwei Gleichungen liefert das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{lll} 20 & = & 4u+2v \\ 3 & = & u+v \end{array}\right.$$

mit der eindeutigen Lösung $u = 7$ und $v = -4$. Also ist

$$\det(A(\alpha)) = 7\alpha^2 - 4\alpha + 16.$$

Aufgabe 4. Die Abbildungsvorschrift $m(x)$ ist keine Norm, da die Eigenschaft (N2) verletzt ist.

Aufgabe 5.

a) Für $x = 1000$ beträgt die Kondition $\kappa_H(x) = 0.501$.

b) Die Auslöschung kann wie folgt vermieden werden:

$$H(x) = (\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-1})\frac{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-1}} = \frac{-2}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-1}}.$$

Aufgabe 6.

a) Zur Vermeidung der Auslöschung ist die relative Kolonnenmaximumstrategie anzuwenden. So erhält man

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.263 & 1 & 0 \\ 0.689 & -0.885 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3.96 & 1.87 & 4.23 \\ 0 & 2.01 & 7.38 \\ 0 & 0 & -1.27 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen von $Lc = Pb$ ergibt: $c = (4.09,\, 3.28,\, 1.26)^T$.

Lösen von $Rx = c$ ergibt: $x = (-0.398,\, 5.27,\, -0.992)^T$.

Aufgabe 7.

a) Als Inverse von A erhält man

$$A^{-1} = 10^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 & -1 \\ -10000 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also erhält man als Kondition $\kappa(A)_\infty = 60003$.

b) Lösen des Gleichungssystems für die rechte Seite $\widehat{b}_1$ ergibt

$$\widehat{x}_1 = \begin{pmatrix} -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix},$$

mit dem relativen Fehler

$$\|\delta x_1\| = \frac{\|\widehat{x}_1 - x\|}{\|x\|} = 10^{-5} = \varepsilon.$$

Lösen des Gleichungssystems für die rechte Seite $\widehat{b}_2$ ergibt

$$\widehat{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix},$$

mit dem relativen Fehler

$$\|\delta x_2\| = \frac{\|\widehat{x}_2 - x\|}{\|x\|} = 0.2.$$

c) Für die rechte Seite $\widehat{b}_1$ erhält man den relativen Fehler

$$\|\delta b_1\| = \frac{\left\|\widehat{b}_1 - b\right\|}{\|b\|} = \varepsilon.$$

Die theoretische Abschätzung des Fehlers $\|\delta x_1\|$ mit der Formel

$$\|\delta x_1\| \leq \kappa(A) \cdot \|\delta b_1\| = 0.6$$

ist in diesem Fall viel zu pessimistisch.
Auch für die rechte Seite $\widehat{b}_2$ erhält man den relativen Fehler

$$\|\delta b_2\| = \frac{\left\|\widehat{b}_2 - b\right\|}{\|b\|} = \varepsilon.$$

Die theoretische Abschätzung des Fehlers $\|\delta x_2\|$ als

$$\|\delta x_2\| \leq \kappa(A) \cdot \|\delta b_2\| = 0.6$$

ist zwar immer noch zu gross. Aber die Grössenordnung des Fehlers stimmt in diesem Fall immerhin überein.

Aufgabe 8. Die Forderung $AB = BA$ liefert die Gleichungen

$$2\sin^2(\varphi) = 0, \quad \text{und} \quad 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \sin(2\varphi) = 0.$$

Um die erste Gleichung zu erfüllen, muss φ ein Vielfaches von π sein. Um die zweite Gleichung zu erfüllen, muss φ ein Vielfaches von $\pi/2$ sein. Die erste Gleichung ist also restriktiver als die zweite, und es folgt die Lösung

$$L = \{\varphi = k \cdot \pi : \; k \in \mathbb{Z}\}.$$