Klasse: ET05a **DMa2** **Klausur 2** 18. Juli 2006

Name:

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x - \cos(x)$, mit einer Nullstelle s in der Nähe von $x = 0.75$. Dabei ist x im Bogenmass zu verstehen.

a) Geben Sie einen Iterations-Algorithmus an, so dass s ein attraktiver Fixpunkt wird, und weisen Sie nach, dass s tatsächlich attraktiv ist.

   Hinweis: Verwenden Sie in Ihren Rechnungen bei der Auswertung von trigonometrischen Funktionen ungefähre Schätzwerte.

b) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der in a) gefundenen Iteration mit derjenigen der Bisektion.

Aufgabe 2. Die Gleichung $x^5 - 1000x + 999 = 0$ hat offensichtlich eine Nullstelle bei $x = 1$.

a) Begründen Sie: Im Intervall $I = [2, 10]$ besitzt obige Gleichung mindestens eine weitere Nullstelle.

b) Bestimmen Sie die (algebraisch vereinfachte) Rekursionsformel, um die Lösungen obiger Formel nach dem Newton-Verfahren zu ermitteln.

c) Ist die Konvergenzbedingung des Newton-Verfahrens beim Startwert $x_0 = 10$ erfüllt?

Aufgabe 3. Gegeben sei der Iterations-Algorithmus $x_{k+1} = F(x_k)$, wobei $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$.

a) Bestimmen Sie (durch algebraische Umformungen) die Fixpunkte des obigen Algorithmus.

b) Stellen Sie die Gleichung $x = F(x)$ graphisch so dar, dass die in a) gefundenen Fixpunkte von $F(x)$ abgelesen werden können. Welche Fixpunkte sind attraktiv, welche abstossend?

c) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert b, so dass die Funktion $F(x)$ im Intervall $I = [-\frac{1}{2}, b]$ alle Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt.

Aufgabe 4. Von der Gleichung $2x^2 - x - 2 = 0$ kennt man die Nullstelle $s = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$. Zu dieser Gleichung sind ferner die folgenden Varianten von Iterations-Algorithmen gegeben:

$$\text{i) } x_{k+1} = 2x_k^2 - 2 \qquad \text{ii) } x_{k+1} = \frac{2}{2x_k - 1} \qquad \text{iii) } x_{k+1} = -\sqrt{\frac{x_k + 2}{2}}.$$

a) Für welche der obigen Varianten ist s ein attraktiver Fixpunkt?

b) Welche der obigen Varianten konvergiert am schnellsten gegen s?

c) Schätzen Sie für die in b) gefundene Variante die Anzahl Iterationen ab, bei einem Startwert $x_0 = -1$ und für fünf korrekte Dezimalstellen nach dem Komma beim Resultat s.

DMa2 Lösungen zur zweiten Klausur

Aufgabe 1.

a) Einfachste Variante: $x_{k+1} = \cos(x_k)$.

$F(x) = \cos(x)$, und damit $F'(x) = -\sin(x)$. Bei der Nullstelle s gilt also:

$|F'(s)| \approx |-\sin(0.75)| \approx \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 < 1$.

Also ist s tatsächlich attraktiv.

b) Bisektion: $q = 0.5$. Iteration: $q \approx 0.7$. Damit konvergiert die Bisektion in diesem Fall schneller.

Aufgabe 2.

a) Setze $f(x) = x^5 - 1000x + 999$. Wegen der Stetigkeit von f in I und wegen $f(2) < 0$ und $f(10) > 0$ folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

b) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^5 - 1000x_k + 999}{5x_k^4 - 1000} = \frac{4x_k^5 - 999}{5x_k^4 - 1000}$.

c) $F(x) = \frac{4x^5-999}{5x^4-1000}$. Also ist $F'(x) = \frac{20x^4(5x^4-1000)-20x^3(4x^5-999)}{(5x^4-1000)^2} = \frac{20x^8-20000x^4+19980x^3}{25x^8-10000x^4+10^6}$.

Für $x_0 = 10$ folgt: $|F'(x_0)| < \frac{2\cdot 10^9 - 2\cdot 10^8 + 2\cdot 10^7}{2.5\cdot 10^9 - 10^8 + 10^6} < 1$.

Also ist die Konvergenzbedingung bei x_0 erfüllt.

Aufgabe 3.

a) Fixpunkte sind die Nullstellen der Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Also $x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Graphische Darstellung wie bei den Beispielen im Skript.

$F'(x) = x$. Also ist $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ attraktiv und $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ abstossend.

c) Voraussetzung i): Damit $F(I) \subseteq I$ erfüllt ist, muss $b \geq F(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ sein.

Voraussetzung ii): Die Stetigkeit von $F(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben.

Voraussetzung iii): $|F'(x)| < 1$ ist im Intervall $(-1, 1)$ erfüllt.

Insgesamt: Der kleinstmögliche Wert ist $b = \frac{3}{8}$.

Aufgabe 4.

a) i) $|F'(s)| = \sqrt{17} - 1 \approx 3 > 1$. Diese Variante ist also divergent.

ii) $|F'(s)| = \frac{16}{(1+\sqrt{17})^2} \approx \frac{16}{25} < 1$. Diese Variante konvergiert also.

iii) $|F'(s)| = \sqrt{\frac{1}{2(9-\sqrt{17})}} \approx \frac{1}{3} < 1$. Diese Variante konvergiert ebenfalls.

b) $|F'(s)|$ ist bei Variante iii) kleiner als bei Variante ii). Also konvergiert iii) schneller als ii).

c) $e_0 = |x_0 - s| = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

Damit wird $n > \frac{\log(\varepsilon) - \log(e_0)}{\log|F'(s)|} = \frac{-6+\log(5)-\log(5-\sqrt{17})+\log(4)}{-0.5(\log(2)+\log(9-\sqrt{17}))}$.