
Name:

Aufgabe 1 *LR-Zerlegung*

Gegeben sind $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Mit diesen beiden Vektoren wird $A = y \cdot x^T$ gebildet.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von x, y und δ auf möglichst einfache Weise.
Nehmen Sie für x lauter Einsen und für y einen „Zufallsvektor".

b) Bestimmen Sie mit *Ihrem* Gauss-Algorithmus die $LR-$Zerlegung von A_δ in Abhängigkeit von n für $n_{min} = 20$, $n_{delta} = 10$ und $n_{max} = 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$, ..., $\delta = 10^{-10}$.

c) Überprüfen Sie wie gut $L \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $L \cdot R - A_\delta$ angeben,
Matlab-Befehl: `norm`.
Graphische Darstellung der Normen in Abhängigkeit von n, halblogarithmisch,
`subplot(2,1,1) ...`
Graphische Darstellung der Kondition der entsprechenden Matrizen A_δ, ebenso halblogarithmisch,
`subplot(2,1,2) ...`

d) Was geschieht für $\delta \to 0$?

Aufgabe 2 *QR-Zerlegung*

Gegeben ist eine Matrix $A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A_0, d.h. $A_0 = Q_0 \cdot R_0$.

b) Berechnen Sie die Matrix $A_1 = R_0 \cdot Q_0$, also Produnkt in *umgekehrter* Reihenfolge!

c) Führen Sie a) für A_1 durch und berechnen Sie ein A_2 gemäss b), usw.

also:

(1)	$A_0 = Q_0 \cdot R_0$	$A_1 = R_0 \cdot Q_0$
(2)	$A_1 = Q_1 \cdot R_1$	$A_2 = R_1 \cdot Q_1$
(3)	$A_2 = Q_2 \cdot R_2$	$A_3 = R_2 \cdot Q_2$
(4)	$\dots$	$\dots$

Wohin konvergiert die Folge der Matrizen A_k, $k = 0, 1, 2, \dots$?
Geben Sie A_{20}, A_{30} an.
Formulieren Sie eine Vermutung.
Versuchen Sie Ihre Vermutung experimentell zu begründen, graphische Darstellung gewisser Normen, halblogarithmisch.

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Funktion von Runge $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf dem Intervall $I = [-5, 5]$ gegeben.

a) Benützen Sie Ihre eigene Polynom-Interpolation, um $r(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit $n = 4, 8, 12$ äquidistanten Punkten zu interpolieren

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $r(x)$ graphisch dar.

c) Stellen Sie in einem separaten Bild $|p_n(x) - r(x)|$ für die gewählten n halblogarithmisch dar.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine tridiagonale $n \times n-$Matrix A, wobei auf der Diagonalen -2 (Ausnahmen: $a_{11} = a_{nn} = -1$) und auf den Nebendiagonalen 1 steht.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von n und δ auf möglichst einfache Weise.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Gram-Schmidt die $QR-$Zerlegung von A_δ für $n = 20, 50, 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$.

c) Überprüfen Sie die Orthogonalität von Q, indem Sie die Norm von $Q \cdot Q^T - Q^T \cdot Q$ betrachten.

d) Überprüfen Sie wie gut $Q \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $Q \cdot R - A_\delta$ angeben.

e) Was geschieht für $\delta \to 0$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Ihrer numerischen Ableitung die Punkte mit horizontalen Tangenten der Funktion

a) $f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x)$

b) $f_b(x) = 2x + |-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3|$

c) Stellen Sie die Funktion mit den Punkten mit horizontaler Tangente graphisch dar

d) Überprüfen Sie die Qualität der numerischen Ableitung (halblogarithmische Graphik)

Aufgabe 6

Auslöschung:

Vermeiden Sie bei der Berechnung von

a) $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\cos(1'') - 1$, wobei $1''$ = eine Bogensekunde

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - 1') - 1$, wobei $1'$ = eine Bogenminute

die Auslöschung

Aufgabe 7

a)

b)

c)