Klasse DP05a **NMMa2 - 1-te Klausur** 16. Mai 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Determinante von $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gauss-Alghorithmus.

b) Zeigen Sie, dass die Determinante einer orthogonalen $n \times n-$ Matrix A den Wert $+1$ oder -1 annehmen kann.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

a) $LR-$ Zerlegung von A mit der relativen Kolonnen-Maximum-Strategie.

b) Lösung von $Ax = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, mit Hilfe von a).

Aufgabe 3

a) Welche der folgenden Abbildungen $n_* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine *Norm*?
(*mit* Begründung)
  a1) $n_1(x) = |x_1| + 2|x_2| + x_3^2 \qquad x \in \mathbb{R}^3$
  a2) $n_2(x) = \sum_{k=1}^{5} \beta_k |x_k|$ wobei $\beta_k = \frac{1}{k}$ für $k = 1, 2, \ldots, 5 \quad x \in \mathbb{R}^5$

b) Gegeben ist eine $n \times n-$ Matrix A für die $A^T = -A$ erfüllt ist (n ungerade).
Gesucht ist die Determinante von A.
Tipp: betrachten Sie zuerst $n = 3$, *nicht* rechnen, überlegen!

bitte wenden!

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist A regulär?

b) Sei nun $a = b$: was müssen Sie für die rechte Seite $c \in \mathbb{R}^3$ verlangen, damit $Ax = c$ Lösungen hat?

c) Geben Sie die Lösungen von b) an, inkl. Rang r und der Anzahl freier Parameter.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 10^{-8} \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\| \quad \|_\infty -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\widetilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$ b2) $\widetilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$ die relativen Fehler $\|\delta\widetilde{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\widetilde{x}_2\|_\infty$.
Vergleich mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung, was stellen Sie fest?

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$$

für $|x|$ gross.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung bei der Berechnung von $H(x)$.

NMMa2 Lösungen 1-te Klausur 16.05.06

Lösung 1

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ . & -1 & 1 & 5 \\ . & . & 1 & -19 \\ . & . & . & -2 \end{vmatrix} = 2$$

b) $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$ und $|A^T| = |A|$, woraus $|A|^2 = 1$ folgt, da $|I_n| = 1$: also $|A| = \pm 1$.

Lösung 2

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, $c = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 - \frac{b_3}{3} \\ -2b_1 + b_2 \end{pmatrix}$ und

zweiter Schritt: $Rx = c$, $x = \begin{pmatrix} -23b_1 + 9b_2 + 2b_3 \\ 15b_1 - 6b_2 - b_3 \\ -2b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) a1) n_1 ist keine Norm, da $(N2)$, Homogenität, verletzt: $\|\alpha x\| \neq |\alpha| \, \|x\|$, wegen dem dritten Term x_3^2

a2) alle drei Eigenschaften erfüllt, n_2 ist eine Norm.

b) $|A^T| = (-1)^n |A|$, da n ungerade: $(-1)^n = -1$, also $|A| = 0$

Lösung 4

a) $|A| = \begin{vmatrix} ① & a & 1 \\ . & 1-a & b-1 \\ . & b-a & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ① & 1 & a \\ . & b-1 & 1-a \\ . & 0 & b-a \end{vmatrix} = -(b-1)\cdot(b-a)$

A ist regulär, falls $b \neq 1$ und $b \neq a$

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	1
①	a	1	c_1
.	$1-a$	$a-1$	$c_2 - c_1$
.	.	.	$c_3 - c_1$

$a \neq 1$: Rang $r = 2$. Es gibt Lösungen, falls $c_3 = c_1$
$a = 1$: Rang $r = 1$. Es gibt Lösungen, falls $c_1 = c_2 = c_3$

c)
- $a \neq 1$ und $c_3 = c_1$. Ein freier Parameter: $x_3 = \mu =$ freier Parameter
$x_2 = \frac{c_2-c_1}{1-a} - \mu$, $x_1 = c_1 - a \cdot \frac{c_2-c_1}{1-a} - \mu(a+1)$ und $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$
geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.
- $a = 1$ und $c_1 = c_2 = c_3$. Zwei freie Parameter: $x_2 = \mu$ und $x_3 = \nu$
$x_1 = c_1 - \mu - \nu$, wobei $\mu, \nu \in \mathbb{R}$
geometrisch: drei zusammenfallende Ebenen.

Lösung 5

a) $A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 1+10^{-8} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10^8 & -10^8 \\ -10^8 & 10^8 \end{pmatrix}$, also
$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8$

b) $\widetilde{x}_k = A^{-1}\widetilde{b}_k$ für $k = 1, 2$

b1) $\widetilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ und b2) $\widetilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 1+(1+\varepsilon)10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$

c) $\Delta\widetilde{x}_k = \widetilde{x}_k - x_k$ für $k = 1, 2$

b1) $\Delta\widetilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\widetilde{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\widetilde{x}_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon 10^8$

und b2) $\Delta\widetilde{x}_2 = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\widetilde{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\widetilde{x}_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = (1+\varepsilon)10^8$

theoretische Schranke: $\|\delta\widetilde{x}\|_\infty = \kappa(A) \left\|\delta\widetilde{b}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8\varepsilon$

für b1) *und* für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, d.h. das Problem ist wirklich schlecht konditioniert. Diese Schranke wäre nur dann nicht realistisch, falls in beiden Komponenten gleichzeitig und genau gleich gestört würde.

Lösung 6

a) $H'(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ und somit $\kappa_H(x) = \left|\frac{xH'(x)}{H(x)}\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \kappa_H(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{1-1/x^2}\;x\sqrt{1+1/x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}\;\sqrt{1+1/x^2}} = 1$

b) Die Kondition ist gut, d.h. die Auslöschung kann vermieden werden.
Erweiterung mit $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}$, was uns $H(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$ liefert.

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 7

Aufgabe 8

a)

b)

Lösung 8

a)

b)

Aufgabe 9

Lösung 9