Klasse DP05a **NMMa2 2-te Klausur** 20. Juni 2006

Name:

Aufgabe 1

Es soll die fünfte Wurzel aus $a = 25$ mit der Methode von Newton gezogen werden.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Funktion $f(x)$.

b) Leiten Sie die entsprechende Rekursionsformel her, (Resultat algebraisch vereinfacht).

c) Sei der Startwert $x_0 = 2$. Ist die Konvergenzbedingung des Verfahrens für x_0 erfüllt?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung $x = 0.1 \cdot x^2 + 1$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte.

b) Graphische Darstellung, welcher der Fixpunkte ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung)

c) Der abstossende Fixpunkt soll mit Rückwärtsiteration bestimmt werden, bestimmen Sie die zugehörige Funktion $F^{-1}(x)$, der Startwert sei $x_0 = 8$, $x_1 =$?

Aufgabe 3

Sei $F(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot |x|$.

a) Wie muss das Intervall $[a, b] = [-1, \ldots]$ gewählt werden, damit alle Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

b) Graphische Darstellung von $x = F(x)$ auf dem in a) gewählten Intervall.

c) Bestimmen Sie den Fixpunkt s. Wie schnell konvergiert diese Iteration?

d) Ist eine Bisektion für dieses Beispiel schneller? (*mit* Begründung)

bitte wenden!

Aufgabe 4

Gegeben ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$$

a) Berechnen Sie I mit einer *Obersumme*. Dabei soll das Intervall $[-1,\,1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden. (Resultat so einfach wie möglich)

b) Wie gross muss n mindesten sein, um I mit einem absoluten Fehler kleiner $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen?

Aufgabe 5

Gegeben ist

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Die Nullstelle von f soll mit der Iteration

$$x = \underbrace{x + k \cdot f(x)}_{=:F(x)} \qquad k = \text{Parameter}$$

bestimmt werden.

Was muss über $k \in \mathbb{R}$ verlangt werden, damit diese Iteration konvergiert?

Aufgabe 6

Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 1 = x + \sqrt{x}$$

mit der Lösung $x_1 = 1$.
Diese Lösung soll mit einer Fixpunktiteration bestimmt werden. Dazu wurden folgende Vorschläge gemacht:

i) $x_{n+1} = x_n^2 - \sqrt{x_n} + 1$ ii) $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \sqrt{x_n} - 1}$ iii) $x_{n+1} = \left(x_n^2 + 1 - x_n\right)^2$

a) Welche der vorgeschlagenen Varianten ist konvergent? (*mit* Begründung)

b) Vergleichen Sie die konvergente(n) Variante(n), wobei $x_0 = 4$ verwendet wird, mit der Bisektion.

Dabei wird für die Bisektion das Startintervall $[a,\,b] = [0.5,\,1.5]$ gewählt. Das Resultat soll $3-$ stellig korrekt sein. Welches der Verfahren ist schneller?

(*mit* Begründung, inkl. Angabe der Anzahl der dazu notwendigen Schritte)

NMMa2 Lösungen der 2-ten Klausur, 20.06.06

Lösung 1

a) $f(x) = x^5 - 25$

b) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^5 - 25}{5 \cdot x_k^4} = \frac{4}{5} \cdot x_k + \frac{5}{x_k^4}$

c) $L(x) = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(x^5 - 25) \cdot 20x^3}{(5 \cdot x^4)^2} \right| = \left| \frac{4 \cdot (x^5 - 25)}{5 \cdot x^5} \right|$ und damit $L(2) = \frac{7}{40} < 1$,
d.h. die Bedingung ist erfüllt.

Lösung 2

a) $x^2 - 10x + 10 = 0$, also $s_{1.2} = 5 \pm \sqrt{15}$

b) $F'(x) = 0.2 \cdot x$ also $F'(s_1) = 0.2 \cdot (5 - \sqrt{15}) < 1$, d.h. s_1 ist attraktiv.
$F'(s_2) = 0.2 \cdot (5 + \sqrt{15}) > 1$, d.h. s_2 ist abstossend.

c) $x_{k+1} = F^{-1}(x_k) = \sqrt{10 \cdot (x_k - 1)}$, $x_0 = 8$ und damit $x_1 = \sqrt{70}$

Lösung 3

a) $[-1, b]$, wobei $b > 4$, damit $F(I) \subset I$. F stetig, und $L = \frac{1}{2} < 1$

b) Graphik

c) $s = 4$ und $q = F'(s) = \frac{1}{2}$

d) Bisektion und Iteration sind gleich schnell, da $q = \frac{1}{2}$, pro Schritt wird der Fehler halbiert.

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e} \right)$

Lösung 5

a) $x_1 = 1$, d.h. $f(x) = (x-1) \cdot (x^2+1)$, nur eine reelle Nullstelle.

b) $s = 1$ ist der einzige Fixpunkt der Iteration.
$F'(x) = 1 + k \cdot (3x^2 - 2x + 1)$ und $F''(x) = k \cdot (6x - 2)$
Konvergenz, falls $|F'(s)| = |1 + 2k| < 1$, also
- $1 + 2k \geq 0$: $-\frac{1}{2} \leq k < 0$.
  Für $k = -\frac{1}{2}$ ist $F'(s) = 0$ und $F''(s) = 4k \neq 0$, somit ist die Iteration sogar quadratisch konvergent!
- $1 + 2k < 0$: $-1 < k < -\frac{1}{2}$

Lösung 6

a) $s = 1$, also $s = F(s)$ und für Konvergenz: $|F'(s)| < 1$

$$\text{i) } F'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}},\ F'(1) = \frac{3}{2} > 1 \qquad \text{ii) } F'(1) = \frac{3}{4} < 1 \qquad \text{iii) } F'(1) = 2 > 1$$

d.h. nur die Variante ii) ist konvergent.

b) Bisektion: in jedem Schritt wird der Fehler halbiert: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^4}{5}\right)$

Varainte ii): in jedem Schritt wird der Fehler um $q = \frac{3}{4}$ verkleinert: $n > \frac{\log\left(\frac{5\cdot 10^{-4}}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$

Variante ii) ist also langsamer als die Bisektion.

Lösung 7

a)

b)

c)

d)

Reserveaufgaben

Aufgabe 7

Lösung 8

Aufgabe 8

a)

b)

Lösung 9

a)

b)

Aufgabe 9

Lösung 10