Klasse DP05a **Labor - Klausur** 06. Juli 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Interpolieren Sie $y = f(x) = 2 \cdot e^{-x}$ auf dem Intervall $[0, 3]$ mit $n = 3$ gleichlangen Teilintervallen durch ein Polynom $p_3(x) = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k auf Maschinengenauigkeit (mit Ihrem *eigenen* Gauss-Algorithmus), bestimmen Sie zudem die Kondition des zu lösenden Gleichungssystems.

b) Integrieren Sie $p_3(x)$ auf dem gegebenen Intervall und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit dem exakten Wert

$$I = \int_0^3 2 \cdot e^{-x}\, dx$$

des Integrals.

Geben Sie sowohl den absoluten als auch den relativen Fehler an.

c) Führen Sie a) und b) in Abhängigkeit von n durch: $n_{min} = 6$ und $n_{max} = 18$ mit Schrittweite $n_{delta} = 2$.

Stellen Sie für die gerechneten Werte von n die absoluten und relativen Fehler in einem *halblogarithmischen* Plot mit verschieden farbigen Punkten graphisch dar.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das lokale Extremum der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x - 8}{2x - 1}$$

sowie ihre Nullstelle.

Für die Bestimmung der Lösungen von $f(x) = 0$ sowie $f'(x) = 0$ müssen Sie *Ihren* Newton–Horner verwenden. Stellen Sie anschliessend die gegebene Funktion für $-6 \leq x \leq 2$ graphisch dar. Markieren Sie das Extremum und die gefundene Nullstelle mit einem „o“.

Geben Sie hier die Namen Ihrer Files an:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Funktion von Runge $r(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf dem Intervall $I = [-5, 5]$ gegeben.

a) Benützen Sie Ihre eigene Polynom-Interpolation, um $r(x)$ auf dem gegebenen Intervall mit $n = 4, 8, 12$ äquidistanten Punkten zu interpolieren

b) Stellen Sie neben dem Interpolationspolynomen $p_n(x)$ auch die Funktion $r(x)$ graphisch dar.

c) Stellen Sie in einem separaten Bild $|p_n(x) - r(x)|$ für die gewählten n halblogarithmisch dar.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine tridiagonale $n \times n-$Matrix A, wobei auf der Diagonalen -2 (Ausnahmen: $a_{11} = a_{nn} = -1$) und auf den Nebendiagonalen 1 steht.
Betrachten Sie nun die Matrix $A_\delta := A + \delta I_n$

a) Definieren Sie diese Matrix in Abhängigkeit von n und δ auf möglichst einfache Weise.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Gram-Schmidt die $QR-$Zerlegung von A_δ für $n = 20, 50, 100$, $\delta = 0.1$ und $\delta = .001$.

c) Überprüfen Sie die Orthogonalität von Q, indem Sie die Norm von $Q \cdot Q^T - Q^T \cdot Q$ betrachten.

d) Überprüfen Sie wie gut $Q \cdot R$ die gegebene Matrix A_δ berechnet, indem Sie die Norm von $Q \cdot R - A_\delta$ angeben.

e) Was geschieht für $\delta \to 0$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Ihrer numerischen Ableitung die Punkte mit horizontalen Tangenten der Funktion

a) $f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x)$

b) $f_b(x) = 2x + |-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3|$

c) Stellen Sie die Funktion mit den Punkten mit horizontaler Tangente graphisch dar

d) Überprüfen Sie die Qualität der numerischen Ableitung (halblogarithmische Graphik)

Aufgabe 6

Auslöschung:

Vermeiden Sie bei der Berechnung von

a) $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\cos(1'') - 1$, wobei $1''$ = eine Bogensekunde

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - 1') - 1$, wobei $1'$ = eine Bogenminute

die Auslöschung

Aufgabe 7

a)

b)

c)