Klasse ET04b **IMa2 1-te Klausur** 16. Mai 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Entwickeln Sie $g(x) = \frac{3}{2+5x}$ in eine Potenzreihe. Bestimmen Sie zudem den Konvergenzradius ρ und das Entwicklungszentrum x_0.

b) Gegeben ist die Potenzreihe $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^j \, x^{j+1}$.

Gesucht sind der Konvergenzbereich und die zugehörige Funktion.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Potenzreihe $p(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^n$. Bestimmen Sie x_0 sowie den Konvergenzradius ρ.

Welche Funktion f wird auf dem Konvergenzbereich dieser Potenzreihe dargestellt.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2}\right)}{k^2} \cdot \sin(kx) \qquad \text{für} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie x aus der Gleichung $\cos(x) = \frac{1}{2}\, x^2$, indem Sie für $\cos(x)$ das Taylorpolynom

a) $2-$ ten Grades

b) $4-$ ten Grades

verwenden.

Aufgabe 4

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$(1+x) \cdot y' = 1$$

mit Hilfe einer Potenzreihe $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ um $x_0 = 0$.

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der erhaltenen Reihe.

Aufgabe 5

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$ in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungszentrum $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Summanden.

b) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{5}{(k+5)(k+6)}$

Bestimmen Sie $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und Konvergenzbereich der Potenzreihe:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (x-2)^k}{\sqrt{(5k-2)3^k}}$$

b) Untersuchen Sie die Konvergenz von $p(x)$ in den Randpunkten des Konvergenzbereichs.

Lösungen der 1-ten IMa2 Klausur 16.05.06

Lösung 1

a)

$$g(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{5}{2}\,x}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5}{2}\,x\right)^k \qquad x_0 = 0 \quad \text{geometrische Reihe mit } q = \left(-\frac{5}{2}\,x\right)$$

Konvergenz, falls $|q| < 1$, also $\rho = \frac{2}{5}$ oder mit Quotientenkriterium: $a_k = (-1)^k\,\left(\frac{5}{2}\right)^k$

b)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^j\,x^{j+1} = x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\,x\right)^j = x\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{7}\,x} \qquad x_0 = 0$$

geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{7}\,x \Rightarrow \rho = \frac{7}{2}$. Die zugehörige Funktion ist $f(x) = \frac{7x}{7-2x}$.
Konvergenzbereich von $p(x)$: $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, also $-\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2}$.

Lösung 2

a) $x_0 = 0$ und $\rho = 1$.

$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ durch Ableiten der linken und rechten Seite erhalten wir:

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$, Multiplikation mit x liefert schliesslich

$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ für $-1 < x < 1$

b) $x = \frac{\pi}{2}$, also haben wir $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, wobei

$a_k = \frac{\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2}\right)}{k^2}\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$. $a_k = 0$ für $k =$ gerade

$k = 1 : a_1 = \frac{1}{1^2}$, $k = 3 : a_3 = \frac{1}{3^2}$, $k = 5 : a_5 = \frac{1}{5^2}$,

allg: $k = 2l+1 : a_{2l+1} = \frac{1}{(2l+1)^2} < \frac{1}{l^2} =$ konvergente Majorante.

Lösung 3

a) $1 - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\,x^2 \Rightarrow x_{1.2} = \pm 1$

b) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{2}\,x^2 \Rightarrow x_{1.2} = \pm\sqrt{12 - 2\sqrt{30}} \approx \pm 1.0225\ldots$

$x_{3.4} = \pm\sqrt{12 + 2\sqrt{30}} \approx \pm 4.7911\ldots$ sogenannte „Geisterlösungen“, d.h. Lösungen, die nichts mit den gesuchten Lösungen zu tun haben.

Lösung 4

$y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$ und damit $(1+x) \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} = 1$, also

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, x^k = 1$,

wobei in der ersten Summe ein Shift um 1 gemacht und in der zweiten Summe Null addiert wurde.

Also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\{(k+1)\, a_{k+1}\, x^k + k\, a_k\, x^k\right\} \overset{!}{=} 1$ und damit ein rekursives Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcrcl}
1 \cdot a_1 & = & 1 & \qquad & a_1 & = & 1 \\
2 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 & = & 0 & & a_2 & = & -\frac{1}{2} a_1 \\
3 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 & = & 0 & & a_3 & = & -\frac{2}{3} a_2 \\
\ldots & & & & \ldots & & \\
(k+1) \cdot a_{k+1} + k \cdot a_k & = & 0 & & a_{k+1} & = & -\frac{k}{k+1} a_k
\end{array}$$

und schliesslich: $y(x) = a_0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - + \ldots = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\, \frac{1}{k}\, x^k$,

$\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$, rechter Rand gehört dazu (Leibniz), Konvergenzbereich: $-1 < x \leq 1$.

Lösung 5

$$\begin{array}{rcl}
f(x) = x \cdot \cos(x) & \qquad & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x) & & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \\
f^{(2)}(x) = -2\sin(x) - x \cdot \cos(x) & & f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\
f^{(3)}(x) = -3\cos(x) + x \cdot \sin(x) & & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\
f^{(4)}(x) = 4\sin(x) + x \cdot \cos(x) & & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \\
f^{(5)}(x) = 5\cos(x) - x \cdot \sin(x) & & f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \\
f^{(6)}(x) = -6\sin(x) - x \cdot \cos(x) & & f^{(6)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6
\end{array}$$

a) $f(x) = -\frac{\pi/2}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{\pi/2}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{4}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{\pi/2}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 - + \ldots$

b) PBZ: $\frac{5}{(k+5)(k+6)} = 5\left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6}\right)$ und damit:

$s_n = 5 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{1+5} - \frac{1}{n+6}\right)$, schliesslich: $s = \frac{5}{6}$

Lösung 6

a) $a_k = \frac{4^k}{\sqrt{(5k-2)3^k}}$, somit $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ mit dem Konvergenzbereich $2 - \frac{\sqrt{3}}{4} < x < 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$, da $x_0 = 2$.

b) linker Rand: $p(2 - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ mit $b_k = \frac{1}{\sqrt{(5k-2)}}$.
Diese Reihe ist konvergent, Kriterium von Leibniz.

rechter Rand: $p(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, auch hier $b_k = \frac{1}{\sqrt{(5k-2)}}$, wie am linken Rand.
Quotienten - und Wurzelkriterium erlauben keine Aussage!
Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{(5k-2)}} > \frac{1}{\sqrt{5k}} > \frac{1}{\sqrt{5}\, k}$ = divergente Minorante.