Klasse ET04b **IMa2 2-te Klausur** 27. Juni 2006

Name:

Aufgabe 1

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$\dot{y} = y - y^2 \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

mit Hilfe einer Potenzreihe $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$.
Geben Sie dabei die Entwicklung bis und mit zur $5-$ ten Potenz in t an.

Aufgabe 2

Eine Kiste ohne Deckel mit dem Volumen 32 m^3 soll hergestellt werden. Bestimmen Sie die Abmessungen, wenn die Oberfläche minimal sein soll. $O_{min} =$?

Aufgabe 3

a) Gegeben ist $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
   Behauptung: u erfüllt die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

b) Zeigen Sie dass $h(x, t) = \left(\frac{v}{g \sin(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}}$ die Gleichung
   $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g \sin(\alpha)}{v} \cdot h^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4

a) Gesucht sind die Extremalstellen der Funktion

$$z = f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) \quad \text{im Kreis} \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

   Geben sie *alle* Stellen an.

b) Sei $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z_p\right)$ eine solche Stelle. Handelt es sich hier um ein Maximum oder um ein Minimum? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte der Fläche $z = f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^3$, in denen die Tangentialebene τ parallel ist zur Ebene $E: -4 \cdot x - 3 \cdot y + z = 0$.

b) Geben Sie für einen dieser Punkte die Gleichung der Tangentialebene in der
   Form $Ax + by + Cz = D$ an.

Aufgabe 6

Es soll die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ in eine Taylorreihe mit $x_0 = 0$ entwickelt werden. Wie gross ist dabei der Konvergenzradius ρ ? (*mit* Begründung)
Anschliessend soll der Funktionswert an der Stelle $x = 0.2$ mit einem Taylorpolynom approximiert werden. Ein Student behauptet, dass für 5 korrekte Dezimalen die ersten drei Terme genügen.
Was sagen Sie dazu, hat er recht? (*mit* Begründung)

Lösungen der 2-ten IMa2 Klausur 27.06.06

Lösung 1

$\dot{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k t^{k-1}$ und $y^2(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) t^n$

$$
\begin{array}{llrcl}
(1) & t^0: & 1 \cdot a_1 & = & a_0 - a_0^2 \\
(2) & t^1: & 2 \cdot a_2 & = & a_1 - (a_0 a_1 + a_1 a_0) \\
(3) & t^2: & 3 \cdot a_3 & = & a_2 - (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) \\
(4) & t^3: & 4 \cdot a_4 & = & a_3 - (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_2 + a_3 a_0) \\
(5) & t^4: & 5 \cdot a_5 & = & a_4 - (a_0 a_4 + a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 + a_4 a_0) \\
(6) & & \ldots & = & \ldots
\end{array}
$$

Lösung rekursiv, von oben nach unten:
$a_0 = \frac{1}{2}$ mit der AB
$a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{48}$, $a_4 = 0$ und $a_5 = \frac{1}{480}$, also

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,t - \frac{1}{48}\,t^3 + \frac{1}{480}\,t^5 - + \ldots$$

Lösung 2

$V = xyz = 32$, wobei $x =$ Breite, $y =$ Länge und $z =$ Höhe des Quaders.
Oberfläche $O(x, y, z) = f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$
gesucht: ein Minimum von f unter der NB $g(x, y, z) = xyz - 32 = 0$
$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$

$$
\begin{array}{lrcl}
(7) & F_x & = & f_x + \lambda \cdot g_x = y + 2z + \lambda \cdot yz = 0 \\
(8) & F_y & = & f_y + \lambda \cdot g_y = x + 2z + \lambda \cdot xz = 0 \\
(9) & F_z & = & f_z + \lambda \cdot g_z = 2x + 2y + \lambda \cdot xy = 0 \\
(10) & F_\lambda & = & f_\lambda + \lambda \cdot g_\lambda = xyz - 32 = 0
\end{array}
$$

(7) - (8) liefert: $(y - x)(1 + \lambda z) = 0$, also $y = x$ oder $1 + \lambda z = 0$
mit $y = x$:

$$
\begin{array}{rcl}
x + 2z + \lambda \cdot xz & = & 0 \\
4x + \lambda \cdot x^2 & = & 0 \\
x^2 z - 32 & = & 0
\end{array}
\quad \Rightarrow x(x - 2z) = 0 \quad x = \frac{z}{2} \qquad x = y = 4,\ z = 2
$$

mit $z = -\frac{1}{\lambda}$ erhalten wir $y - \frac{2}{\lambda} - y = 0$ einen Widerspruch!

oder, eleganter: $z = \frac{V}{xy}$, und damit wird $f(x, y\, z)$ zu einer Funktion in zwei Variablen reduziert:
$f_{neu}(x, y) = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$

also: $x = y = 4$ m und $z = 2$ m. $O_{min} = 48$ m^2

Bem: Es handelt sich um ein geometrisches Problem, die Lösung ist eindeutig, deshalb ist es überflüssig nachzuprüfen, ob wirklich ein Minimum angenommen wird.

Lösung 3

a) einsetzen und nachrechnen

b) einsetzen und nachrechnen

Lösung 4

a)

$$\begin{array}{rcl} f_x &=& y(1-3x^2-y^2) \\ f_y &=& x(1-x^2-3y^2) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{xx} &=& -6xy \\ f_{xy} &=& (1-3x^2-3y^2) = f_{yx} \\ f_{yy} &=& -6xy \end{array}$$

$f_x = 0$ und $f_y = 0$: $y_1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ oder $x_1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ oder $x_1 = y_1 = 0$
$x \neq 0$ und $y \neq 0$: $x = \pm\frac{1}{2}$ und $y = \pm\frac{1}{2}$
also: $(0,\, 0)$, $(0,\, \pm 1)$, $(\pm 1,\, 0)$, $\left(\frac{1}{2},\, \pm\frac{1}{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2},\, \pm\frac{1}{2}\right)$, neun Extremalstellen.

b) $z_p = -\frac{1}{8}$ mit $A := f_{xx}(x_p,\, y_p) = \frac{3}{2}$, $B := f_{xy}(x_p,\, y_p) = -\frac{1}{2}$ und $C := f_{yy}(x_p,\, y_p) = \frac{3}{2}$ und somit $(A^2 - BC) > 2$ und da $A > 0$ haben wir in P ein lokales Minimum.

Lösung 5

a) Normalvektor der Ebene E: $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Normalvektor von τ: $\begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$f_x = 4x + 3y = 4$ und $f_y = 3x + 3y^2 = 3 \Rightarrow y_1 = 0$ und $y_2 = \frac{3}{4}$ mit den zugehörigen $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{7}{16}$: gesuchte Punkte $P_1(1,\, 0)$ und $P_2\left(\frac{7}{16},\, \frac{3}{4}\right)$.

b) $\tau_k: \; z = f(P_k) + f_x(P_k)(x - x_p) + f_y(P_k)(y - y_k)$ für $k = 1, 2$
$\tau_1: \; z = 2 + 4(x-1) + 3(y-0) \Rightarrow 4x + 3y - z = 2$
oder
$\tau_2: \; z = \frac{229}{128} + 4(x - \frac{7}{16}) + 3(y - \frac{3}{4}) \Rightarrow 4x + 3y - z = \frac{283}{128}$

Lösung 6

Binomialreihe mit $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{8}\,x^6 + \frac{5}{16}\,x^9 + \frac{35}{128}\,x^{12} \ldots$$

$\rho = 1$, da $a_k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix}$ und somit
$\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{\alpha - k}\right| = 1$
der vierte Summand hat für $x = 0.2$ den Wert: $1.6 \cdot 10^{-6} < 5 \cdot 10^{-6}$, d.h. er hat recht!