Klasse ET04b **IMa2 Modul-Nachprüfung** 14. September 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \ln(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $t = 1$ bis $t = 10$.

b) In welchem Punkt ist die Tangentialebene τ der Fläche $z = 4 - x^2 - y^2$ parallel zur Ebene $E: \; 2x + 2y + z = 0$?

Stellen Sie die Gleichung von τ auf.

Aufgabe 2

Gegeben ist das Feld $\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2z^3\cos(x) - 4x^3z \\ 2z^3y\sin(x) \\ 3y^2z^2\sin(x) - x^4 \end{pmatrix}$

a) Ist ein Linienintegral für $\vec{F}$ wegabhängig? (*mit* Begründung)

b) Bestimmen Sie das Lininenintegral von $\vec{F}$ längs dem Weg γ, wobei γ die geradlinige Verbindung von $A(0,\,1,\,0)$ nach $B(1,\,0,\,1)$ ist.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y} = t^2 + y^2 \qquad y(0) = 1$$

mit Hilfe einer Potenzreihe. Entwickeln Sie die Lösung bis und mit dem Term fünfter Ordnung.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die relativen und absoluten Extrema der Funktion

$$z = f(x,\,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1 \qquad \text{im Bereich} \qquad |x| \le 2 \quad \text{und} \quad |y| \le 2$$

(*alle* Werte!)

b) Berechnen Sie im Punkt $P(2,\,1)$ die Ableitung der Funktion $z = f(x,\,y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ in die Richtung, die von diesem Punkt zum Koordinatenursprung zeigt.

Aufgabe 5

Welcher Punkt des Rotationsparaboloides $z = x^2 + y^2$ ist am nächsten beim Punkt $Q(3,\,-6,\,4)$?

Aufgabe 6

a) Entwickeln Sie mit Hilfe von *Taylor* die Funktion $f(x) = e^x$ nach Potenzen von $(x+1)$ bis und mit zum Glied $(x+1)^3$ und geben Sie das Lagrange'sche Restglied an.

b) Zeigen Sie, dass $\sin(x_0 + h)$ von $sin(x_0) + h\,\cos(x_0)$ um nicht mehr als $\frac{1}{2}\,h^2$ abweicht.

Lösungen der Modul-Nachprüfung in IMa2 (ET04b) 14.09.06

Lösung 1

a) $L = \int\limits_{\gamma} \sqrt{\dot{\vec{r}}(t)}\, dt = \int\limits_{1}^{10} \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2}\, dt = \int\limits_{1}^{10} \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}}\, dt = \int\limits_{1}^{10} \frac{2t^2+1}{t}\, dt = \int\limits_{1}^{10} (2t + \frac{1}{t})\, dt =$ $99 + \ln(10)$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

daraus folgt, dass die Tangentialebene durch den Punkt $P(1,\, 1,\, 2)$ gehen muss, also

$z = z_0 + f_x(1,\, 1)(x - x_0) + f_y(1,1)(y - y_0) = 2 + (-2)(x-1) + (-2)(y-1)$ oder

$\tau :\ 2x + 2y + z = 6$

Lösung 2

a) ein Linienintegral ist wegunabhängig, da $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, d.h. $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld.

b) durch das Linienintegral oder durch Bestimmung des zugehörigen Potentials

$U(x,\, y,\, z) = y^2 z^3 \sin(x) - x^4 z + C.$

$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = U(B) - U(A) = -1$, wobei

Weg γ : $\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} (1-t)^2 t^3 \cos(t) - 4t^3 \\ 2t^3(1-t)\sin(t) \\ 3(1-t)^2 t^2 \sin(t) - t^4 \end{pmatrix}$

Lösung 3

$y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ und $\dot{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k t^{k-1}$

einsetzen

AB: $y(0) = 1 = a_0$

$y^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, wobei $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}$ mit $(n+1)$ Summanden.

$$\begin{aligned}
a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \ldots \quad = \quad & t^2 + a_0^2 \\
& + t\,(a_0 a_1 + a_1 a_0) \\
& + t^2\,(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) \\
& + t^3\,(a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0) \\
& + t^4\,(a_0 a_4 + a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 + a_4 a_0) \\
& + t^5\,(a_0 a_5 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1 + a_5 a_0) \\
& + \ \ldots
\end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{llrcl}
(1) & t^0: & a_1 & = & a_0^2 \\
(2) & t^1: & 2a_2 & = & a_0a_1 + a_1a_0 \\
(3) & t^2: & 3a_3 & = & 1 + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0) \\
(4) & t^3: & 4a_4 & = & a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 \\
(5) & t^4: & 5a_5 & = & a_0a_4 + a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1 + a_4a_0
\end{array}$$

und damit: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{5}{3}$ und $a_5 = \frac{7}{5}$, also

$$y(t) = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}\,t^3 + \frac{5}{3}\,t^4 + \frac{7}{5}\,t^5 + \ldots$$

Lösung 4

a) $f_x = 2x + y + 1$, $f_y = x + 2y - 1$: $f_x = 0$ und $f_y = 0$ für $x = -1$ und $y = 1$, d.h. $P(-1,\,1,\,0)$ ist ein lokales Extremum. $f_{xx} = f_{yy} = 2$ und $f_{xy} = 1 \Longrightarrow P$ ist ein lokales Minimum.

Eckpunkte: $P_1(2,\,2,\,13)$, $P_2(-2,\,2,\,1)$, $P_3(-2,\,-2,\,13)$ und $P_4(2,\,-2,\,9)$, alle Eckpunkte sind lokale Maxima.

obere Kante: $g_1(x) = f(x,\,2) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow$ lokales Minimum $Q_1(-\frac{3}{2},\,2,\,\frac{3}{4})$
untere Kante: $g_2(x) = f(x,\,-2) = x^2 - x + 7 \Rightarrow$ lokales Minimum $Q_2(\frac{1}{2},\,2,\,\frac{35}{4})$
linke Kante: $g_3(y) = f(-2,\,y) = y^2 - 3y + 3 \Rightarrow$ lokales Minimum $Q_3(-2,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{4})$
rechte Kante: $g_4(y) = f(2,\,y) = y^2 + y + 7 \Rightarrow$ lokales Minimum $Q_4(2,\,\frac{1}{2},\,\frac{31}{4})$

b) Richtungsableitung allgemein: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$
und in einem Punkt P: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.
hier: $P(2,\,1)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 - y^3 \\ 2x^2y - x^3y^2 - 3 \end{pmatrix}$ und $\nabla f(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,
also
$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}$

Lösung 5

Tangentialebene τ in P auf der Fläche so, dass der zugehörige Normalvektor $\vec{n}$ durch den Punkt Q geht, also

$\overrightarrow{0P} + \lambda\vec{n} = \overrightarrow{0Q}$, wobei $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x(P) \\ -f_y(P) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_P \\ -2y_P \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcll}
(6) & x_P + \lambda(-2x_P) & = & 3 & \\
(7) & y_P + \lambda(-2y_P) & = & -6 & \\
(8) & z_P + \lambda \cdot 1 & = & 4 & \quad \text{mit} \quad z_P = x_P^2 + y_P^2
\end{array}$$

$x_P = \frac{3}{(1-2\lambda)}$ und $y_P = -\frac{6}{1-2\lambda}$ einsetzen in $z_P = \frac{9}{(1-2\lambda)^2} + \frac{36}{(1-2\lambda)^2} + \lambda = 4$ und daraus folgt:

$45 = (4-\lambda) \cdot (1-2\lambda)^2$ und schliesslich: $4\lambda^3 - 20\lambda^2 + 17\lambda + 41 = 0$
eine Nullstelle ist $\lambda = -1$ mit Hornerschema.
Schliesslich: $x_P = 1$, $y_P = -2$ und $z_P = 5$, gesuchter Punkt $P(1, -2, 5)$.

Lösung 6

a) $f(x) = e^x = \frac{1}{e}\, e^{x+1} = \frac{1}{e}\left\{1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!}\right\} + R_4$, wobei

   $R_4 = \frac{1}{e}\,\frac{(x+1)^4}{4!}\, e^{\vartheta(x+1)}$ mit $0 < \vartheta < 1$

b) auch hier Taylorpolynom mit Rest:

   $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0) + h\,\cos(x_0) + R_2$, wobei $R_2 = -\frac{h^2}{2}\,\sin(x_0 + \vartheta h)$, mit $0 < \vartheta < 1$.

   $|R_2| \leq \frac{h^2}{2}$, da $|\sin(x_0 + \vartheta h)| \leq 1$