Klasse ET04b **WStE 1-te Klausur** 06. Juni 2006

Name:

Aufgabe 1

In der untenstehenden Tabelle ist der prozentuale Anteil der Gewichte von Gegenständen einer Sammlung dargestellt:

Gewicht G in g	prozentualer Anteil der Sammlung
$100 \leq G < 110$	18.4
$110 \leq G < 120$	20.3
$120 \leq G < 130$	22.5
$130 \leq G < 140$	18.8
$140 \leq G < 150$	11.7
$150 \leq G < 160$	8.3

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel des Gewichts der leichteren 80% der Sammlung.

b) Welches Gewicht muss ein Gegenstand mindestens haben, um zu den schwereren 10% der Gegenstände der Sammlung zu gehören?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung s des Gewichts G.

Aufgabe 2

Bei einer Stichprobe mit 101 Werten wurde der Mittelwert 120.1 und die Standardabweichung 10.5 berechnet. Nach der Rechnung stellte es sich heraus, dass in die Originalliste nur 100 Werte gehören und dass der Wert 141.8 versehentlich aufgenommen wurde. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe, die aus den restlichen 100 Werten besteht.

Aufgabe 3

Bei der Untersuchung der Milchmenge $Y[kg]$ einer Kuh in Abhängigkeit vom Fettgehalt $X[\%]$ ergaben sich aus den Messwerten folgende Summenwerte:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 35.1 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 123.81 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 204 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 4202 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 711.5$$

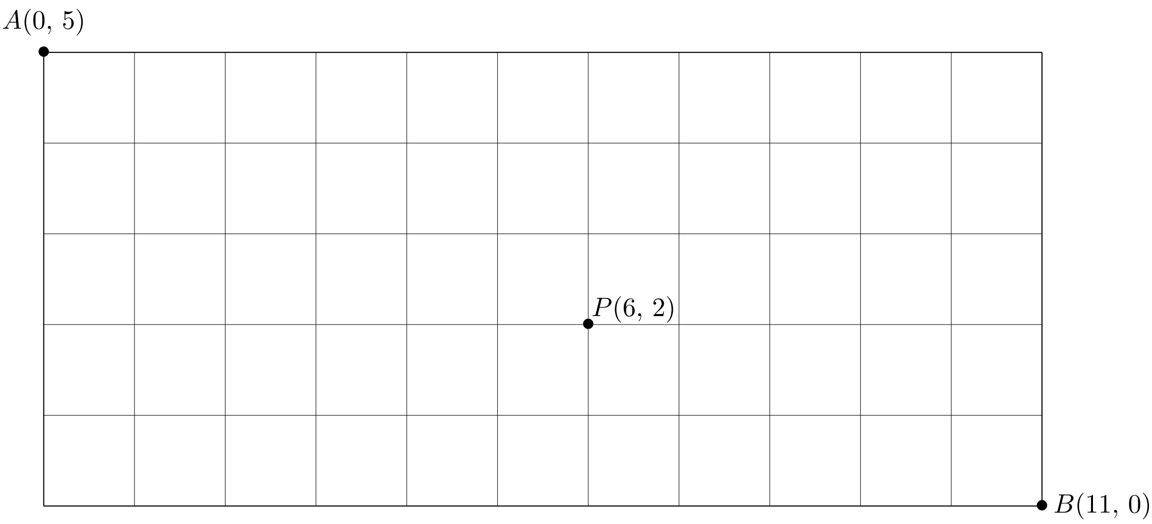
a) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.

c) Was stellen Sie fest? Folgerung aus dem Resultat.

bitte wenden!

Aufgabe 4



a) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es, die *nicht* durch P gehen?

b) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es, bei denen die letzten drei Schritte horizontal nach rechts gehen?

Aufgabe 5

Gegeben sind die Buchstaben A, B, C, D, E, F und I.

Gesucht ist je die Anzahl der verschiedenen Worte der Länge 5, die daraus gebildet werden können, falls

a) jeder Buchstabe nur einmal verwendet werden darf.

b) jeder Buchstabe beliebig oft verwendet werden darf.

c) wie b), aber keine 2 Konsonanten und keine 2 Vokale nebeneinander stehen dürfen.

d) wie b), aber die Worte mit einem Konsonanten beginnen und mit einem Konsonanten enden.

Aufgabe 6

Eine Urne enthält 8 rote, 5 gelbe und 2 blaue Kugeln. Man zieht ohne zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

a) Sie haben genau 3 rote und 2 gelbe Kugeln gezogen.

Sie ziehen nun drei Kugeln:

b) Mindestens die ersten beiden Kugeln sind verschiedenfarbig.

c) Mindestens die erste und die dritte Kugel sind gleichfarbig.

Lösungen der 1-ten WStE Klausur 06.06.06

Lösung 1

a) die ersten vier Klassen machen zusammen gerade 80% aus, also
$\overline{x}_{80\%} = \frac{0.184\cdot 105+0.203\cdot 115+0.225\cdot 125+0.188\cdot 135}{0.8} = 120.2125$

b) lineare Interpolation: bis und mit der vierten Klasse haben wir 80%, also wieviel muss von der fünften Klasse dazugenommen werden, um 90% um zu erhalten: $\frac{10}{11.7}\cdot 10 = 8.54700854700855$ und somit $G \geq 148.54700854700855$

c) $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{6} x_i^* \cdot f_i = 126$, wobei $x_i^* =$ Klassenmitten

$s^2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{6} (x_i^*)^2 \cdot f_i\right] - \overline{x}^2 = 233.2$ und damit $s = 15.27088733505688$

Lösung 2

$\overline{x} = \frac{1}{101}\cdot \sum\limits_{i=1}^{101} = 120.1$, also $\sum\limits_{i=1}^{101} x_i = 120.1\cdot 101 = 12130.10.$

Summe der restlichen 100 Werte: $\sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 120.1\cdot 101 - 141.8 = 11988.3$ und der

neuer Mittelwert $\overline{x}_{neu} = \frac{1}{100}\cdot \sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 119.883$

allgemein gilt:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\cdot s^2 + n(\overline{x})^2$$

$n = 101 :$ $s^2 =$ alte Stichprobenvarianz und $s =$ alte Standardabweichung

$s^2 = \frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{101} x_i^2 - \frac{1}{101(100)}\left(\sum\limits_{i=1}^{101} x_i\right)^2 = (10.5)^2$ und damit:

$\sum\limits_{i=1}^{101} x_i^2 = \left\{100\cdot(10.5)^2 + \frac{1}{101}\left(\sum\limits_{i=1}^{101} x_i\right)^2\right\} = \left\{100\cdot(10.5)^2 + 101\cdot(120.1)^2\right\} = 1467850.01$, also

Quadratsumme der restlichen 100 Werte:

$\sum\limits_{i=1}^{100} x_i^2 = \left\{100\cdot(10.5)^2 + 101\cdot(120.1)^2\right\} - (141.8)^2 = 1447742.77$

$n_{neu} = 100 :$

$s_{neu}^2 = \frac{1}{99}\cdot \sum\limits_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{100}{99}(\overline{x}_{neu})^2 = 106.5596070707052$ und schliesslich:

$s_{neu} = 10.32277128830748$

Lösung 3

$Y[kg]$ und $X[\%]$

a) Stichprobenvarianzen und Standardabweichungen:

$s_X^2 = \frac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9} x_i^2 - \frac{1}{9\cdot 8}\left(\sum\limits_{i=1}^{9} x_i\right)^2 = 0.06766666666667 \Rightarrow s_X = 0.26012817353502$

$s_Y^2 = \frac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9} y_i^2 - \frac{1}{9\cdot 8}\left(\sum\limits_{i=1}^{9} y_i\right)^2 = 4.48888888888894 \Rightarrow s_Y = 2.11869981094277$

Mittelwerte: $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10} x_i = 3.51000000000000$ und $\overline{y} = \frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10} y_i = 20.40000000000000$

Kovarianz: $s_{XY} = \frac{1}{9}\left\{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i - \overline{x}\sum\limits_{i=1}^{10} y_i - \overline{y}\sum\limits_{i=1}^{10} x_i + 10\cdot\overline{x}\,\overline{y}\right\} = -0.50444444444445$

und damit die

Korrelation: $r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X\cdot s_Y} = -0.91528537709842$

b) Regressionsgerade: $y = a + b\cdot x$, wobei

$b = r_{XY}\cdot\frac{s_Y}{s_X} = -7.45484400656816$ und $a = \overline{y} - b\cdot\overline{x} = 46.56650246305426$

c) X und Y sollten gerade vertauscht sein, da der Fettgehalt mit zunehmender Milchmenge abnimmt! (der Fettgehalt ist abhängig von der Milchmenge) oder: je höher der Fettgehalt, desto kleiner die Milchmenge.

Lösung 4

a) Anzahl Wege durch den Punkt P.

- Wege von A nach P: die Weglänge ist 9, wobei drei Schritte nach unten bzw. sechs Schritte nach rechts zu machen sind: $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$
- Wege von P nach B: die Weglänge ist 7, wobei zwei Schritte nach unten bzw. fünf Schritte nach rechts zu machen sind: $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$

sämtliche Wege: $\binom{16}{5} = \binom{16}{11}$

also Anzahl gesuchter Wege: $\binom{16}{5} - \binom{9}{3}\cdot\binom{7}{2} = 2604$

b) Weg muss durch den Punkt $Q(8,\,0)$ gehen. Alle Wege von A nach Q: Weglänge ist 13, wobei 5 Schritte nach unten und 8 Schritte nach rechts zu machen sind,

also $\binom{13}{5} = \binom{13}{8} = 1287$

Lösungen der 1-ten WStE Klausur 06.06.06

Lösung 5

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 5!$

b) 7^5

c) $4^3 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3^3$

d) $4^2 \cdot 7^3$

Lösung 6

a) $\dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}}$

b) Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ertsen Kugeln *gleiche* Farbe haben:
$\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14}$,
also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} - \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} = 1 - \frac{39}{105} = \frac{66}{105} = \frac{22}{35}$

c) mit Hilfe eines Ereignisbaums: (insgesamt sind acht Äste relevant)
für die roten Kugeln:
$\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 14}$
für die gelben Kugeln:
$\frac{5}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{5 \cdot 4}{15 \cdot 14}$
für die blauen Kugeln:
$\frac{2}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{1}{13} + \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{2 \cdot 1}{15 \cdot 14}$
insgesamt also wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$\frac{8 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{15 \cdot 14} = \frac{78}{15 \cdot 14} = \frac{13}{5 \cdot 7}$