Klasse ET04b **WStE 2-te Klausur** 18. Juli 2006

Name:

Aufgabe 1

Ein Massenartikel wird auf drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 produziert. 50% der Produktion stammt von M_1, 30% von M_2 und der Rest von M_3.
Maschine M_1 liefert 10% Ausschuss, Maschine M_2 5% und Maschine M_3 2%.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Gesamtproduktion gewählter Artikel brauchbar ?

b) Ein defekter Artikel wurde erwischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Maschine M_1?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser defekte Artikel nicht von Maschine M_2 stammt?

Tipp: Verwenden Sie das Ereignis $S :=$ Ausschuss.

Aufgabe 2

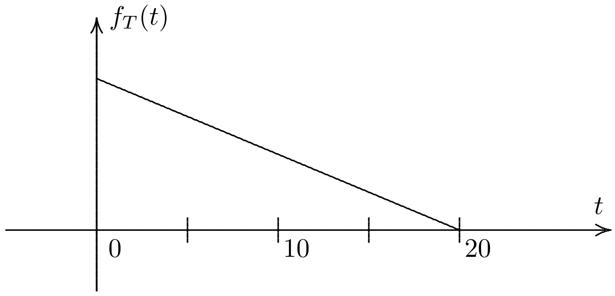
Nach den Aussagen einer Personalleiterin gibt es unter den Bewerbern für eine Manager-Position nur 7% mit wirklicher „Leadership Quality“.

a) Wieviele Bewerber müsste ein Headhunter durchleuchten, um mit Wahrscheinlichkeit 0.95 mindestens einen Bewerber mit wirklichen Führungsqualitäten dabei zu haben?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter dieser Anzahl genau drei geeignete Manager gibt?

Aufgabe 3

In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen.
Die Dauer T der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen.



Die Dichte $f_T(t)$ habe nebenstehende Form.

a) Bestimmen Sie $f_T(t)$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit T zwischen 5 und 10 Wochen beträgt.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und den Median von T.

bitte wenden!

Aufgabe 4

Zwei Personen wollen zu einem je zufällig gewählten Zeitpunkt zwischen 14.00 Uhr und 15.00 Uhr am gleichen Ort ankommen. Falls eine ankommende Person die andere nicht trifft, soll sie z Minuten, jedoch höchstens bis 15.00 Uhr warten.

a) Bestimmen Sie ein geeignetes Modell.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die beiden Personen treffen.

Aufgabe 5

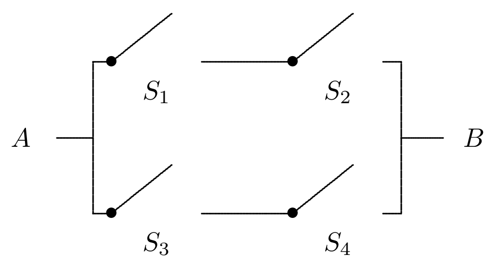
Der Lipoidphosphor-Gehalt X im Blutplasma Erwachsener wird als normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 99.8$ [mg/l] und Standardabweichung $\sigma = 15.2$ [mg/l] angenommen.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lipoidphosphor-Gehalt X zwischen 84.6 [mg/l] und 130.2 [mg/l] liegt?

b) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass 99% der Erwachsenen einen Lipoidphosphor-Gehalt kleiner c haben.

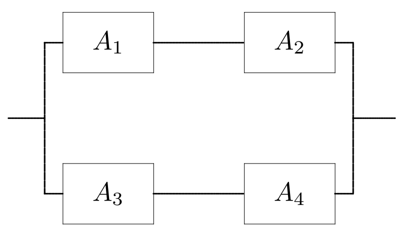
Aufgabe 6

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Strom von A nach B fliesst, unter der Voraussetzung, dass die Ereignisse G_i ($=$ Schalter S_i ist geschlossen) alle unabhängig sind.



Es sei $P(G_1) = \frac{1}{2}$, $P(G_2) = P(G_4) = \frac{2}{3}$ und $P(G_3) = \frac{3}{4}$.

b) Bestimmen Sie die Zuverlässigkeit Z ($=$ Wahrscheinlichkeit für Funktionsfähigkeit) des folgenden Systems:



wobei das Ereignis $A_k =$ „$k-$ te Komponente funktioniert". Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist $P_k = P(A_k) = p$, $0 < p < 1$ für alle Komponenten. Die Komponenten funktionieren unabhängig voneinander.

Für welche Werte von p gilt: i) $Z(p) < p$, für welche p gilt: ii) $Z(p) > p$

Lösungen der 2-ten WStE Klausur 18.07.06

Lösung 1

a) $P(S^c) = P(M_1) \cdot P(S^c|M_1) + P(M_2) \cdot P(S^c|M_2) + P(M_3) \cdot P(S^c|M_3) = 0.931$

b) $P(M_1|S) = \frac{P(M_1 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M_1) \cdot P(S^c|M_1)}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{1-0.931} = 0.724638$

c) $P(M_2|S) = \frac{P(M_2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M_2) \cdot P(S^c|M_2)}{P(S)} = \frac{0.3 \cdot 0.05}{1-0.931} = 0.217391$, also
$P(M_2^c|S) = 1 - 0.21... = 0.7826..$

Lösung 2

$p = 0.07$ und $q = 1 - p = 0.93$

a) Gegenwahrscheinlichkeit: kein Bewerber mit den verlangten Qualitäten: $(0.93)^n$ und
somit $1 - (0.93)^n \geq 0.95 \Rightarrow (0.93)^n \leq 0.05$ und damit $n \geq \frac{\log(0.05)}{\log(0.93)} = 41.28$, also mindestens $n = 42$ Kandidaten.

b) $\binom{n}{3} p^3 \cdot q^{n-3} = \binom{42}{3} (0.07)^3 \cdot (0.93)^{n-3} = 2.3231e - 001$,
d.h. mit $2.3\%-$ iger Wahrscheinlichkeit.

Lösung 3

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\,dt = \int\limits_{0}^{20} f_T(t)\,dt \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow$ Achsenabschnitt von $f_T(t)$ muss 0.1 sein und damit

$$f(t) = \begin{cases} 0.1 - \frac{0.1}{20}\,t & \text{falls} \quad 0 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $P(5 \leq T \leq 10) = \int\limits_{5}^{10} f_T(t)\,dt = \left(0.1 \cdot t - \frac{0.1}{20} \cdot \frac{t^2}{2}\right)\Big|_5^{10} = 0.3215$

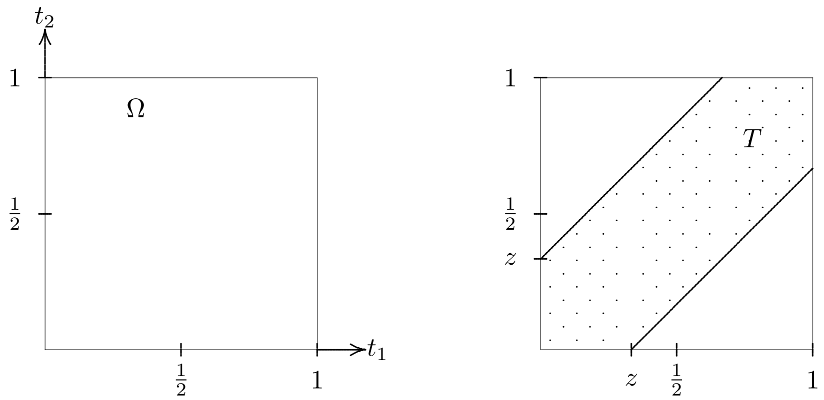
c) $\mu = E(T) = \int\limits_{0}^{20} t \cdot f_T(t)\,dt = \left(0.1 \cdot \frac{t}{2} - \frac{0.1}{20} \cdot \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{20} = \frac{40}{3}$

Median: $0.5 = \int\limits_{0}^{t} f_T(\tau)\,d\tau = F(t) = 0.1 \cdot t - \frac{0.1}{20} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t^2 - 40t + 200 = 0$

mit den Lösungen $t_{1.2} = 20 \pm 10\sqrt{2}$, wobei nur $t = 20 - 10\sqrt{2}$ in Frage kommt, da $t < 20$ erfüllt sein muss.

Lösungen der 2-ten WStE Klausur 18.07.06

Lösung 4

a) 

$t_1 =$ Zeit, in Stunden, die verstrichen ist, seit 14.00 Uhr bis zur Ankunft von Person 1.

$t_2 =$ Zeit, in Stunden, die verstrichen ist, seit 14.00 Uhr bis zur Ankunft von Person 2.

Annahme: es liegen sogenannte geometrische Wahrscheinlichkeiten vor, d.h. die Flächeninhalte sind proportional zu den Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = k \cdot F(A)$

b) das interessierende Ereignis: $T := \left\{(t_1,\, t_2)\middle|\, |t_1 - t_2| \leq z\right\}$, $0 < z < 1$

$P(\Omega) = k \cdot F(\Omega) = 1 \Longrightarrow k = 1$ und somit $P(T) = 1 \cdot F(T) = 2z - z^2$

Lösung 5

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

a) $P(84.8 \leq X \leq 130.2) = \Phi(z_{oben}) - \Phi(z_{unten})$,
wobei $z_{oben} = \frac{130.2-99.8}{15.2} = 2$ und $z_{unten} = \frac{84.6-99.8}{15.2} = -1$
also $P(84.8 \leq X \leq 130.2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.81850$

b) $\Phi(z) = 0.99 \Rightarrow z = 2.3267$ mit linearer Interpolation.
Damit erhalten wir für $c = z \cdot \sigma + \mu = 135.17$ [mg/l]

Lösung 6

a) $S =$ es fliesst Strom. $S = (G_1 \cap G_2) \cup (G_3 \cap G_4) \overset{deMorgan}{=} ((G_1 \cap G_2)^c \cap (G_3 \cap G_4)^c)^c$,
also $P(S) = 1 - (1 - P(G_1) \cdot P(G_2)) \cdot (1 - P(G_3) \cdot P(G_4)) = \frac{2}{3}$

b) $S =$ System funktioniert. $S = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \overset{deMorgan}{=} ((A_1 \cap A_2)^c \cap (A_3 \cap A_4)^c)^c$,
also $Z(p) = P(S) = 1 - (1 - p^2) \cdot (1 - p^2) = 2p^2 - p^4$.

i) $Z(p) - p = p(1-p)(p^2 + p - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < p < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ii) $Z(p) - p = p(1-p)(p^2 + p - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < 1$