Klasse DP05a **NMMa3 - 1-te Klausur** 13. Dezember 2006

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & b \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

b) Bestimmen Sie - in Abhängigkeit des Parameters b - zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Für welche Werte von b ist die Matrix B diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0,\, 1]$.
Eine lineare Abbildung $\mathcal{F}: \; \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ ist mit

$$(\mathcal{F}(p)) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

definiert.

a) Betrachten Sie die Monome als Basis und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von F und $\mathcal{F}$.

c) Für welche $p(x) \in V$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$, mit $c =$ konstant.

Aufgabe 3

Wir betrachten den Vektorraum $V = C[0,\, 2\pi]$ mit dem Skalarprodunkt

$$(f,\, g) := \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

$U = span\,\{1,\, \sin(x),\, \sin(2x),\, \sin(3x)\}$ ist ein $4-$ dimensionaler Unterraum $U \subset V$.

a) Ortho-normalisieren Sie die für U gewählte Basis.

b) Projizieren Sie die Funktion $h(x) = x$ auf U.

bitte wenden

Aufgabe 4

Bezüglich einer neuen Basis Σ_{neu} aufgespannt von $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der linearen Abbildung $\mathcal{F}:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $F_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ zugeordnet.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\tau:\ \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$ und ihre Inverse T^{-1}.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e.

c) Ein Bildpunkt $\mathcal{F}(P)$ hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $\frac{1}{3}(16,\, 18)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P in der alten Basis Σ_e.

d) Um wieviel werden die Eigenvektoren von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e gestreckt?

Aufgabe 5

a) Gegeben ist $V = C^1[-2,\, 0]$. Seien $f(x) \in V$ und $g(x) \in V$ zwei Vektoren aus V.
Ist mit

$$(f,\, g) := \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} f'(x)g(x)\, dx + f(-1) \cdot g(0)$$

ein Skalarprodukt definiert? (*mit* Begründung)

b) Welche der folgenden Mengen bilden ein Erzeudensystem bzw. eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad 2?

(1) $\{1,\, 2x^2,\, x^2 + 2\}$

(2) $\{4,\, 3x - 1,\, 2x^2 + 1, x^3 - 1\}$

(3) $\{2,\, x - 3,\, 2x^2 - 1, x^2 - 2x\}$

(4) $\{x - 1,\, x + 1,\, 2x^2\}$

(*mit* Begründung)

Aufgabe 6

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 26x_1 - 4x_2 + 5$$

Die Gleichung $Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Lösungen der ersten NMMa3 Klausur 13.12.06

Lösung 1

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = -2$

b) $E_{-2} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{b}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF = alg VF = 1.

- $b \neq 0 : E_6 = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, geom VF $= 1 <$ alg VF $= 2$.
- $b = 0 : E_6 = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF = alg VF = 2.

c) B ist diagonalisierbar genau dann, falls geom VF = alg VF für jeden EW, d.h. falls $b = 0$.

Lösung 2

Basis: $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1 - x = e_1 - e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1 - 2x - x^2 = e_1 - 2e_2 - e_3$

und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Kern(F) = 0$ und $Bild(F) = \mathbb{R}^3$, da F eine reguläre Matzrix, d.h.

$Kern(\mathcal{F})$ = Nullpolynom und $Bild(\mathcal{F}) = P_2$ = alle möglichen Polynome vom Grad 2.

c) EWP von F: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2.3} = -1$

$v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $p_1(x) = \mu$ mit $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$ und $p_2(x) = \mu(1 - 2x)$ mit $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 3

a) Die gegebene Basis ist bereits orthogonal, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Normalisierung: $(\sin(kx), \sin(kx)) = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(kx)\, dx = \pi$, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Ortho-Normalbasis: $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$, $k = 1, 2, 3$

b) $\mathcal{P}(h) = \sum\limits_{k=0}^{3} (h, e_k)\, e_k = c_0 e_0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$

$c_0 = (h, e_0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi^2$ und $c_k = (h, e_k) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \cdot x\, dx = (-\frac{2\pi}{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $k = 1, 2, 3$

und eingesetzt: $\mathcal{P}(h(x)) = \pi - \frac{2}{1} \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin(3x)$

Matlab-File: `NMMa3_131206.m`

Lösung 4

a) $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = TF_{neu}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Koordinaten von P bzgl. Σ_{neu} : $(F_{neu})^{-1}\begin{pmatrix} 16/3 \\ 18/3 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2})\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

und schliesslich: $x_{alt} = Tx_{neu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) EW von F in Σ_e bzw. EW von F_{neu} in Σ_{neu}. Da F und F_{neu} ähnliche Matrizen, sind ihre EW identisch: $\lambda_{1.2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$

Lösung 5

a) nein, denn $(f, g) \neq (g, f)$, d.h. die Symmetrie ist verletzt.

b) (1): weder noch.

(2): ja, ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_2$ aber keine Basis, denn $x^3 - 1$ ist überflüssig.

(3): ja, ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_2$, keine Basis, denn z.B. $x^2 - 2x$ ist überflüssig. Für eine Basis genügen die ersten drei oder erstes, zweites und viertes Element, (dann wäre das dritte überflüssig).

(4): ja, ist ein Erzeugendensystem *und* eine Basis, kein überzähliges Element.

Lösung 6

$Q(x_1, x_2) = x^T Ax - c^T x + 5 = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 26 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $det(A) = 36 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, d.h. es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A: $\lambda_1 = 9$ mit $v^{(1)} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 4$ mit $v^{(2)} = \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit

neue o.n. Basis Σ_{neu}: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal.

T ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arctan(-2)$, negativer Drehsinn.

Kurve im neuen Koordinatensystem Σ_{neu}:

$$(5) \qquad 9x_{neu_1}^2 + 4x_{neu_2}^2 - c_{neu}^T x_{neu} + 5 = 0 \qquad c_{neu} = T^T c = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 18 \\ 56 \end{pmatrix}$$

quadratische Ergänzung von (5) liefert:

$$(6) \qquad 9\left(x_{neu_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(x_{neu_2} - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = -5 + \frac{9}{5} + 4 \cdot \frac{49}{5} = 36$$

aus (6) erhalten wir $M_{neu}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$, Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$.

Der Mittelpunkt bzgl. Σ_e ist $T\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^T = (3,\, 1)^T$,

d.h. wir haben eine Translation um den Vektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$