

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und Basen für die zugehörigen Eigenräume von A .
- Ortho – normieren Sie die Basen der Eigenräume.
- Geben Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, sodass $A = TDT^T$.

Aufgabe 2

- Sei $V =$ Vektorraum der $n \times n$ - Matrizen.

Welche der beiden Teilmengen bildet einen Unterraum U in V , (mit Begründung)

- Teilmenge der symmetrischen Matrizen.
- Teilmenge der Matrizen mit $\text{Spur}(A) = 1$.

Falls ja, geben Sie die Dimension des entsprechenden Unterraums U an.

- Sei $V = \text{span} \{1, \cos(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\}$

- Bestimmen Sie eine Basis von V , $\dim V = ?$

- Der Unterraum $U \subset V$ besteht aus den Funktionen mit $f \in V$ für die $\int_0^\pi f(x) dx = 0$.

Geben Sie eine Basis für U an, $\dim U = ?$ **Aufgabe 3**

Gegeben sind die folgenden Abbildungen:

$$(1) \quad \mathcal{F}_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \mathcal{F}_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

- Sind diese Abbildungen linear? (mit Begründung)
- Geometrische Interpretation dieser Abbildungen.
- Geben Sie, falls die Abbildung linear ist, die zugehörige Abbildungsmatrix bzgl. der Standardbasis Σ_e an.

Aufgabe 4

Wir betrachten den Vektorraum $V = C[-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

$U = \text{span}\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$ ist ein 4-dimensionaler Unterraum $U \subset V$.

a) Ortho – normieren Sie die für U gewählte Basis.

b) Projizieren Sie die Funktion $h(x) = \begin{cases} k \in \mathbb{R}, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ auf U . (graphische Darstellung von h)

Aufgabe 5

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 4x_2 - 28$$

Die Gleichung $Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve im \mathbb{R}^2 .

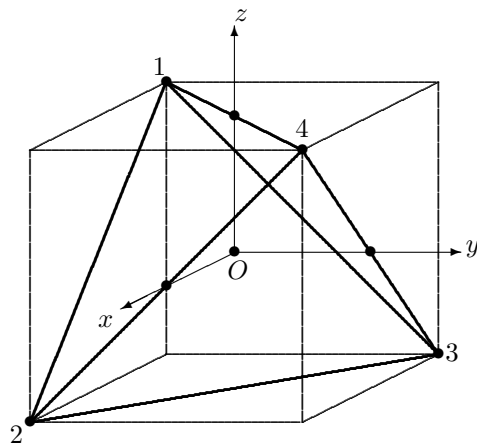
a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Tetraeder mit den Ecken 1, 2, 3 und 4, das dem Würfel eingeschrieben ist. Betrachten Sie die Abbildung \mathcal{F} im \mathbb{R}^3 , die die Punkte wie folgt abbildet:

$$1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 3 \quad 3 \mapsto 1 \quad 4 \mapsto 4, \text{ d.h. } 4 \text{ bleibt fest}$$



a) Stellen Sie die Abbildungsmatrix von \mathcal{F} bzgl. der Standardbasis Σ_e auf, Koordinatenursprung ist 0.

b) Stellen Sie die Abbildungsmatrix bzgl. einer neuen o.n. Basis Σ_{neu} auf, wobei b_1 in Richtung der Geraden $g = g(0, 4)$, b_2 in der Ebene aufgespannt von e_2 und e_3 . Weiter soll $b_3 \perp b_i$, $i = 1, 2$ sein.

Aufgabe 7

a) Ist der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$? (mit Begründung)

b) Zeigen Sie, dass $\lambda = a + b + c$ ein Eigenwert der Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 8

Sei die Ebene $E : x - 2y + z = 0$ gegeben. Betrachten Sie die Spiegelung \mathcal{S} an E .

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix S von \mathcal{S} bzgl. der Standardbasis Σ_e .

b) Bestimmen Sie eine neue Basis Σ_{neu} so, dass die Spiegelung \mathcal{S} bzgl. dieser neuen Basis möglichst einfach wird.

c) x hat in der alten Basis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht sind die Koordinaten des Bildvektors $y = \mathcal{S}(x)$ in der neuen Basis.

Aufgabe 9 alt

Sei $V = \mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0, 1]$.

Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ist mit

$$(\mathcal{F}(p)) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

definiert.

a) Betrachten Sie die Monome als Basis und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von \mathcal{F} bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von F und \mathcal{F} .

c) Für welche $p(x) \in V$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$, mit $c = \text{konstant}$.

bitte wenden

Aufgabe 10 alt

Bezüglich einer neuen Basis Σ_{neu} aufgespannt von $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $F_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ zugeordnet.

- Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\tau : \Sigma_{neu} \rightarrow \Sigma_e$ und ihre Inverse T^{-1} .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von \mathcal{F} bzgl. Σ_e .
- Ein Bildpunkt $\mathcal{F}(P)$ hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $\frac{1}{3}(16, 18)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P in der alten Basis Σ_e .
- Um wieviel werden die Eigenvektoren von \mathcal{F} bzgl. Σ_e gestreckt?

Aufgabe 11 alt

- Gegeben ist $V = C^1[-2, 0]$. Seien $f(x) \in V$ und $g(x) \in V$ zwei Vektoren aus V .
Ist mit

$$(f, g) := \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f'(x)g(x) dx + f(-1) \cdot g(0)$$

ein Skalarprodukt definiert? (mit Begründung)

- Welche der folgenden Mengen bilden ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad 2?

- $\{1, 2x^2, x^2 + 2\}$
- $\{4, 3x - 1, 2x^2 + 1, x^3 - 1\}$
- $\{2, x - 3, 2x^2 - 1, x^2 - 2x\}$
- $\{x - 1, x + 1, 2x^2\}$

(mit Begründung)

Lösung 1

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = -2$

b) $E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{b}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, geom VF = alg VF = 1.

- $b \neq 0$: $E_6 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, geom VF = 1 < alg VF = 2.

- $b = 0$: $E_6 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, geom VF = alg VF = 2.

c) B ist diagonalisierbar genau dann, falls geom VF = alg VF für jeden EW, d.h. falls $b = 0$.

Lösung 2

Basis: $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1 - x = e_1 - e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1 - 2x - x^2 = e_1 - 2e_2 - e_3$

und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\text{Kern}(F) = 0$ und $\text{Bild}(F) = \mathbb{R}^3$, da F eine reguläre Matrix, d.h.

$\text{Kern}(\mathcal{F}) = \text{Nullpolynom}$ und $\text{Bild}(\mathcal{F}) = P_2 = \text{alle möglichen Polynome vom Grad } 2$.

c) EWP von F : $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -1$

$$v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $p_1(x) = \mu$ mit $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$ und $p_2(x) = \mu(1 - 2x)$ mit $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 3

a) Die gegebene Basis ist bereits orthogonal, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Normalisierung: $(\sin(kx), \sin(kx)) = \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \pi$, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Ortho-Normalbasis: $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$, $k = 1, 2, 3$

b) $\mathcal{P}(h) = \sum_{k=0}^3 (h, e_k) e_k = c_0 e_0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$

$$c_0 = (h, e_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi^2 \text{ und } c_k = (h, e_k) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \cdot x dx = \left(-\frac{2\pi}{k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$k = 1, 2, 3$

und eingesetzt: $\mathcal{P}(h(x)) = \pi - \frac{2}{1} \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin(3x)$

Matlab-File: NMMa3_131206.m

Lösung 4

a) $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = TF_{neu}T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Koordinaten von P bzgl. Σ_{neu} : $(F_{neu})^{-1} \begin{pmatrix} 16/3 \\ 18/3 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

und schliesslich: $x_{alt} = Tx_{neu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) EW von F in Σ_e bzw. EW von F_{neu} in Σ_{neu} . Da F und F_{neu} ähnliche Matrizen, sind ihre EW identisch:
 $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$

Lösung 5

a) nein, denn $(f, g) \neq (g, f)$, d.h. die Symmetrie ist verletzt.

b) (1): weder noch.

(2): ja, ist ein Erzeugendensystem von \mathbb{P}_2 aber keine Basis, denn $x^3 - 1$ ist überflüssig.

(3): ja, ist ein Erzeugendensystem von \mathbb{P}_2 , keine Basis, denn z.B. $x^2 - 2x$ ist überflüssig. Für eine Basis genügen die ersten drei oder erstes, zweites und viertes Element, (dann wäre das dritte überflüssig).

(4): ja, ist ein Erzeugendensystem *und* eine Basis, kein überzähliges Element.

Lösung 6

$Q(x_1, x_2) = x^T Ax - c^T x + 5 = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 26 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = 36 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, d.h. es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A : $\lambda_1 = 9$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 4$ mit $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit

neue o.n. Basis Σ_{neu} : $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal.

T ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arctan(-2)$, negativer Drehsinn.

Kurve im neuen Koordinatensystem Σ_{neu} :

$$(7) \quad 9x_{neu_1}^2 + 4x_{neu_2}^2 - c_{neu}^T x_{neu} + 5 = 0 \quad c_{neu} = T^T c = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 18 \\ 56 \end{pmatrix}$$

quadratische Ergänzung von (7) liefert:

$$(8) \quad 9 \left(x_{neu_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4 \left(x_{neu_2} - \frac{7}{\sqrt{5}} \right)^2 = -5 + \frac{9}{5} + 4 \cdot \frac{49}{5} = 36$$

aus (8) erhalten wir $M_{neu} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}} \right)$, Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$.

Der Mittelpunkt bzgl. Σ_e ist $T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T = (3, 1)^T$,

d.h. wir haben eine Translation um den Vektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$