Klasse DP05a **NMMa3 - 2-te Klausur** 7. Februar 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{y} = Ay$ mit den

Anfangsbedingungen $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Lösen Sie das gegebene Problem durch Entkopplung.

b) Wie müssen die AB gewählt werden, damit sämtliche Lösungen für $t \longrightarrow \infty$ gegen Null gehen?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

(1) $$(1+t)\,\dot{x} - \alpha\, x = 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1$$

a) Lösen Sie (1) mit Hilfe einer Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe in a).

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\Phi(t) := e^{tA}$.

b) Lösen Sie mit a) das AWP $\dot{x} = Ax$ mit den AB $x(0) = x_0 = 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Kondition von B bzgl. der $\|...\|_2-$ Norm in Abhängigkeit des Parameters b.

b) Wohin strebt die Kondition $\kappa(B)$ für $b \longrightarrow -1$?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 0.2\,\dot{x} + 2.01x = 0 \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) *exakte* Lösung des Systems in a).

c) Approximieren Sie die Lösung aus b) mit der Methode von Euler, (Schrittweite $h > 0$). Geben Sie die dafür benötigte Rekursion an. Führen Sie einen Schritt aus.

Aufgabe 6

a) Wie lauten die Bedingungen für die drei Parameter a, c_1 und c_2 des $2-$ stufigen Runge–Kutta Verfahrens

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + ah, y_k + ahk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h\{c_1 k_1 + c_2 k_2\} \end{aligned}$$

damit es maximale Fehlerordnung hat?

b) Erklären sie, dass die Fehlerordnung p höchstens 2 ist.

c) Als Spezialfälle sind sowohl die Methode von Heun, als auch die verbesserte Polygonzugmethode abzuleiten.

Lösungen der zweiten NMMa3 Klausur 07.02.07

Lösung 1

a) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -3$, doppelt und $\lambda_3 = -2$, einfach mit den

zugehörigen EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

und damit: $y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\, v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t}\, v^{(3)}$.

Bestimmung der c_k mit den AB: $y_0 = Tc \Longrightarrow c_1 = 4$, $c_2 = 1$ und $c_3 = 2$ und schliesslich

$y(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) y_0 darf beliebig gewählt werden, da *alle* EW reell und negativ!

Lösung 2

a) $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \ldots$

$\dot{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, t^{k-1} = a_1 + 2\, a_2\, t + 3\, a_3\, t^2 + \ldots$

einsetzen in die gegebene Dgl:

$$(1+t)\,(a_1 + 2\, a_2\, t + 3\, a_3\, t^2 + \ldots) = \alpha\,(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \ldots)$$

AB: $x(0) = 1 \;\Rightarrow a_0 = 1$

Koeffizientenvergleich nach Potenzen in t:

(3) $\quad t^0: \quad a_1 = \alpha\, a_0 \qquad a_1 = \dfrac{\alpha}{1}$

(4) $\quad t^1: \quad a_1 + 2a_2 = \alpha\, a_1 \qquad a_2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1}$

(5) $\quad t^2: \quad 2a_2 + 3a_3 = \alpha\, a_2 \qquad a_3 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

(6) $\quad t^3: \quad 3a_3 + 4a_4 = \alpha\, a_3 \qquad a_4 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

(7) $\quad \ldots$

allgemein:

(8)
$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k \cdot (k-1)\ldots 1} =: \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$$

b) mit (8) erhalten wir

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)}{(\alpha-k)} \right| = 1$$

Lösung 3

a) EWP von A: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -6$ mit den zugehörigen EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$,

also neue Basis: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\Phi(t) = e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6\,e^{2t} + 2\,e^{-6t} & e^{2t} - e^{-6t} \\ 12\,e^{2t} - 12\,e^{-6t} & 2\,e^{2t} + 6\,e^{-6t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

es gilt: $\Phi(0) = I_2$ und $\Phi(-t) = e^{-tA} = \Phi^{-1}(t)$, d.h. $\Phi(t) \cdot \Phi(-t) = I_2$

b) $x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung 4

a) Da B nicht symmetrisch ist, müssen die EW von $C = B^T B = \begin{pmatrix} 1+b^2 & 1-b \\ 1-b & 2 \end{pmatrix}$ berechntet werden:

$$det(B - \mu\, I_2) = \begin{vmatrix} (1+b^2) - \mu & 1-b \\ 1-b & 2-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - \mu\,(3+b^2) + (1+b)^2 \overset{!}{=} 0$$

was uns $\mu_{max} = \frac{3+b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{3+b^2}{2}\right)^2 - (1+b)^2}$ und $\mu_{min} = \frac{3+b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{3+b^2}{2}\right)^2 - (1+b)^2}$ liefert.

Gemäss Theorie sind beide EW positiv und $\kappa(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2 = \frac{\sqrt{\mu_{max}}}{\sqrt{\mu_{min}}}$.

b) Mit $b \longrightarrow -1$ geht $(1+b)^2 \longrightarrow 0$ und damit geht $\mu_{max} \longrightarrow 4$ und $\mu_{min} \longrightarrow 0$, m.a.W.: $\kappa(B) \longrightarrow \infty$.

Für $b = -1$ haben wir $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, eine *singuläre* Matrix!

Lösung 5

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.01 & -0.2 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -0.1 \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{2}$ mit den EV $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ und somit

$y_h(t) = 2\,e^{-0.1\,t}\left(a\cos(\sqrt{2}t) - b\sin(\sqrt{2}t)\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2\,e^{-0.1\,t}\left(b\cos(\sqrt{2}t) + a\sin(\sqrt{2}t)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

AB: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{\sqrt{2}}{40} \end{cases}$ und schliesslich

$y_h(t) = e^{-0.1\,t}\left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{20}\sin(\sqrt{2}t)\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} + e^{-0.1\,t}\left(-\sin(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{20}\cos(\sqrt{2}t)\right)$

c) Euler: $y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei hier $f(x, y) := Ay$, also

$$y_{k+1} = y_k + h\,A\,y_k \qquad \text{mit} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{somit:} \;\; y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h\,A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.01h \end{pmatrix}$$

Lösung 6

In der Theorie wurde für ein $3-$ stufiges Verfahren

$$d_{k+1} = hf(1 - c_1 - c_2 - c_3) + h^2 F\left(\frac{1}{2} - a_2c_2 - a_3c_3\right) \tag{9}$$

$$+h^3\left\{Ff_y\left(\frac{1}{6} - a_2c_3b_{32}\right) + G\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_2^2c_2 - \frac{1}{2}a_3^2c_3\right)\right\} + O(h^4) \tag{10}$$

hergeleitet.

a) Bei einem $2-$ stufigen Verfahren haben wir nur $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, weiter ist $c_3 = 0$, also muss gelten:

$$1 = c_1 + c_2 \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} = a_2c_2 \tag{12}$$

b) Mit diesen Bedingungen kann der Koeffizient von h^3 nicht auch noch gleichzeitig zu Null gemacht werden!

c) $a_2 = a$ und $b_{21} = a$

Heun: $a = 1 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, also $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$

verbesserter Polygonzug: $a = \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = 1$ und $c_1 = 0$ also $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$